动态经济系统的调节与演化

VISIT…

动态经济系统的调节与演化

邓英淘 , 何维凌 编著

四川人民出版社

一九八五年·成都

特约编辑：朱熹豪
责任编辑：姚展华
封面设计：曹　力
插　　图：曹　力
装　　帧：盛寄萍

走向未来丛书

动态经济系统的调节与演化

邓英淘　何维凌 编著

四川人民出版社出版（成都盐道街三号）
内江新华印刷厂印刷
四川省新华书店发行

开本787×960mm 1/32　印张10.5　插页6　字数158千

1985年8月第一版　1985年8月第一次印刷

书号：17118·127　印数：1—39,000册

定价：1.65 元

编 者 献 辞

《走向未来》丛书和读者见面了。

她凝聚着我们的心血和期望。

我们期待她能够：展现当代自然科学和社会科学日新月异的面貌；反映人类认识和追求真理的曲折道路；记录这一代人对祖国命运和人类未来的思考。

我们的时代是不寻常的。二十世纪科学技术革命正在迅速而又深刻地改变着人类的社会生活和生存方式。人们迫切地感到，必须严肃认真地对待一个富有挑战性的、千变万化的未来。正是在这种历史关头，中华民族开始了自己悠久历史中又一次真正的复兴。

在艰苦而又富有生命力的改革道路上，我们坚

2595/14

定了马克思主义的信仰，理解了科学的价值，并逐步深化了对我们时代和民族的认识。今天，我们听从祖国的召唤，热情地投身于实现社会主义现代化的伟大潮流。

马克思有一句名言："思想的闪电一旦真正射入这块没有触动过的人民园地，德国人就会解放成为人。"* 今天，照亮我们民族的思想闪电，就是马克思主义、科学精神和我们民族优秀传统的结合，以及由此开始的创新！

《走向未来》丛书力图从世界观高度把握当代科学的最新成就和特点，通过精选、咀嚼、消化了的各门学科的知识，使读者特别是青年读者能从整个人类文明曲折的发展和更迭中，理解中华民族的伟大贡献和历史地位，科学地认识世界发展的趋势，激发对祖国、对民族的热爱和责任感。

她特别注重于科学的思想方法和新兴的边缘学科的介绍和应用；把当前我国自然科学、社会科学，以及文学艺术方面创造性的成果，严肃地介绍给社会，推动自然科学与社会科学的结合。

《丛书》是个新园地，她将自始至终贯彻严肃

---

* 《马克思恩格斯选集》，人民出版社，1975年版，第1卷，第15页。

认真的学风和生动活泼的文风。

《走向未来》丛书从她一开始就受到老一辈共产党人关怀，受到学术界前辈的热情支持。

约四百年前，弗兰西斯·培根在《伟大的复兴》一书序言中，曾经这样谈到书中描述的对象，他“希望人们不要把它看作一种意见，而要看作是一项事业，并相信我们在这里所做的不是为某一宗派或理论奠定基础，而是为人类的福祉和尊严……。”我们怀着真挚的感情，把这段话献给《丛书》的读者，希望广大读者关心她、批评她、帮助她。

让她成为我们共同的事业。

《走向未来》丛书编委会

一九八三年六月于北京

前　言

二十世纪，特别是五十年代以来，人类社会的经济活动和结构出现了日益广泛而深刻的巨大变化。人们从不同角度、用不同术语来看待或描述这场巨变，有说是“产业革命”，有说是“技术革命”，也有笼统称之为“浪潮”的。然而，仅就经济过程本身而言，其主要特征无外乎：技术更新的频率加快，新兴产业的迅速出现，协调合作的全球趋势。

每一个经济发展周期的长波峰，与技术革新的突发期有一定关系。重大技术革新总是带来新的产品、新的工艺，甚至新的工业，从而带来经济的重新增长。其中起关键作用的是穿梭于生产、经营、管理、决策等方面的信息流，这已成为当代经济增长或发展的生命线。与此同时，从各区域到整个社

会乃至全世界范围的协调与合作不断加强，已是当代经济发展的一大趋势。《有效的管理者》一书的作者彼德·杜拉克在“第十八届世界管理会议”上指出，世界上出现了一种新的、被叫做“生产共享”的经济结构模式。例如，“由西德和荷兰合办的一家欧洲纺织公司，在共同市场国家内进行纺织和印染后，将布空运到摩洛哥或阿尔及利亚或泰国制成服装、衬衣、地毯或床单，然后再空运回来在公共市场销售。”而电子工业正是实行这种“生产共享”的鼻祖（被称为信息时代的其他三种骨干工业，即宇航工业、海洋工程和遗传工程，也都具有“生产共享”特征）。这种全球性的协调与合作，正在许多领域中广泛出现，意味着一场深刻的经济结构的变革。

面临着经济领域的这场广泛而深刻的巨变，二十世纪特别是五、六十年代以来的经济学家也异常活跃。他们不仅从经济活动的各个方面、各种层次，以不同角度来分析问题，而且从其他科学的许多最新成果中获得启迪，特别是从当代发展起来的一般方法科学中引出种种分析工具，形成五光十色的学说、学派，此起彼落，此唱彼和，至今方兴未艾，势头不衰。无论是在国家决策还是在企业管理

上，无论是在生产经营还是在市场预测上，经济学家的分析愈益受到重视。

然而，与经济学领域派系林立、观点歧异的同时，有一个共同趋向却日益明显而突出了，这就是概念体系的严密化、规范化，度量方法的科学化、数学化。人们不断努力寻求以简洁、明了、深刻而科学的语言作为分析各种经济现象、交流经济思想或信息的共同基础。其中最值得庆幸的是应信息时代之运而生的现代控制理论和耗散结构理论正深入经济学领域，短短几年、十几年之期，真是硕果累累，开阔了人们的视野，提供了重大突破的可能性。这一方面是共同趋向的某种标志，一方面又是使之深入发展的某种动力，并且为经济研究领域引进信息时代的骄子——电子技术（特别是计算机技术）创造了必备的条件。

控制理论(Control theory)是本世纪三十年代针对工程技术系统的问题发展起来的一般理论，它是应用数学的一个分支，是一门边缘科学。但是，比之四、五十年代开始出现的控制论(Cybernetics)*，其涵义要狭窄得多，主要是围绕着对系统稳定的控

* 控制论（Cybernetics）一词，严格讲应译为控制、调节论。

制这一基本问题，展开精确而严密的技术性讨论。以后控制理论又逐渐渗入其他领域，如电气、航空、化工、核反应、生物工程等，到五、六十年代便形成一套完整而严谨的理论体系，称为现代控制理论（modern control theory）。七十年代以来，许多控制理论专家开始发觉经济领域对他们大有用武之地，前景极其广阔，于是大批控制理论专家转入经济研究领域。同时，许多数理经济学家和经济计量学家，也发觉他们多年来面临的一些问题，在现代控制理论中可以找到成熟的理论和方法。这样，两股潮流汇合在一起，使现代经济控制理论获得迅速发展，仅仅十几年，有关论文、专著就已不可胜数了。

现代控制理论的基本思路是：在确定的目标下使系统的运行保持在最佳的轨道（或区域）上。因此，它特别适用于研究既定的动态系统的平衡问题。

耗散结构理论(dissipative-structure theory)是著名物理学家、布鲁塞尔学派创始人普利高津（I.priqoqine）于1969年，针对非平衡态热力学中的有序化问题而首先提出来的。所谓耗散结构，是指当系统处于非平衡状态（远离平衡的状态）时，通过系统与外界交换能量和物质而形成并维持

的一种稳定化了的宏观结构，即在非平衡态下宏观系统的自组织现象。这一理论不仅为非平衡态热力学系统的研究创造了崭新的局面，而且为其他复杂系统，如生态系统、社会经济系统的演化或发展问题提供了一般分析的理论基础。近几年来，已有多方面的专家、学者对耗散结构理论的研究和应用产生越来越大的兴趣，并进行了许多有益的开拓性的探索。特别是顺应当代经济领域的急剧变革，其作用更令人瞩目。

耗散结构理论的基本思路是：寻求系统在非平衡状态下形成稳定有序结构的条件和机制，提出自组织过程的一般原理，肯定在演化或发展中的不确定性的意义、选择的意义。因此，它特别适用于研究动态系统的演化问题。

动态是世上万事万物的基本特征，也是社会经济活动的基本特征。粗略地讲，系统的动态有两大类，平衡动态（或曰动态平衡）和演化动态（或曰动态演化）。无论从哪方面或哪个层次上看，在经济活动中这两种动态都是交互存在、相互补充的。然而，以往的大多数经济学家却往往偏重于动态平衡问题，他们的形形色色的经济理论都是均衡理论的变种，用“均衡”这一线索可以贯穿其间。这在

五、六十年代以前，即在人们尚未认真对待这悄然而来的时代巨变之前，倒也是很自然的事。但是，一旦人们普遍认识到这一社会经济的巨变之后，如果仍然仅从“平衡”或“均衡”的角度来研究或描述经济的活动和发展，那就会显得苍白无力了。

对于经济的活动和发展，无论是大到国家决策或产业兴衰，还是小到企业管理或工种分化，从某种意义上说可以有两条最基本的原则隐含其间：一是经济活动的效益原则，一是经济发展的自组织原则。这两个原则是交相掩映，互为补充的。

第一个原则是：在一定的经济目标下（从而相应地确定了某种经济效益的含意），寻求最优控制（以达到最大效益）的问题。这正好落入现代控制理论的“彀中”。从可控制与否，可观测与否，到如何才算达到目标(平衡、稳定)，如何才能达到目标等，该理论都有一套完整的数学工具来解决问题。

第二个原则是：在一定的新的推动力（内部的和外部的）下，经济活动将形成某种新的组织格局，以利于新形势下的稳定增长或发展。这正和耗散结构理论的思路暗合。经济发展中的自组织过程正是耗散结构理论所揭示的在混沌中的有序、远离平衡态的有序、通过涨落的有序。该理论不仅揭示

了这一过程的运行机制，而且也逐渐形成一套较严谨的数学—逻辑描述。

我们编写这本小册子的目的，就是想概要地介绍如何运用这两方面的理论和方法分析动态（平衡和演化）经济系统。如果有兴趣的读者，特别是青年读者，通过这种粗线条的介绍，能够跨越数学的门栏，从而开阔视野，获得启迪，我们的目的就达到了。

在编写本书的过程中，我们得到《中国农村发展问题研究组》的许多同志，尤其是周其仁、白南生和罗小朋同志的帮助和支持，在此深致谢意。特别值得一提的是，这些同志对党的十一届三中全会后我国农村出现的蓬勃发展和异常活跃的经济形势，进行了广泛的调查和深入的研究，并针对许多新的具有结构性特征的经济现象（如重点户、专业户，新的分工分业，新的经济联合等）提出了卓有见地的见解，本书的最后三章（以耗散结构的理论和方法进行动态经济分析）便是在这一基础上撰写的。但由于我们的才疏学浅，难免有讹有误，望广大读者不吝指正赐教。

编著者

1984年3月于北京

目　录

第一章　经济系统的状态空间表示 …… 1～35

1.1　基本概念 …… 3

1.2　经济系统的状态空间表示 …… 7

1.3　动态经济系统的求解问题 …… 27

1.4　小结 …… 33

第二章　动态经济系统的可控性和可观性

…… 37～74

2.1　可控性和可观性的直观涵义 …… 40

2.2　线性动态经济系统的可控性 …… 43

2.3　线性动态经济系统的可观性 …… 59

2.4　对偶原理 …… 68

2.5　小结——经济系统的分解和描述 …… 70

第三章　动态经济系统的稳定性 …… 75～112

3.1　问题的提出 …… 77

3.2 平衡与稳定的直观背景及定义……84
3.3 线性离散系统的稳定性……92
3.4 非线性经济系统的静态线性化和平衡的局部稳定性……98
3.5 经济系统线性化的例子……106
3.6 小结……111

第四章 动态经济系统的反馈与控制……113～139
4.1 反馈的一般概念……116
4.2 线性系统的反馈控制及状态反馈……121
4.3 输出反馈……129
4.4 小结……139

第五章 动态经济系统的最优控制……141～191
5.1 最优控制问题的一般提法……143
5.2 动态规划方法……147

5.3 线性二次型最优控制问题 …… 158
5.4 总结 …… 184

第六章 耗散结构与经济系统 …… 193～230
6.1 导言：确定性、随机性和不确定性 …… 195
6.2 开放系统与耗散结构 …… 205
6.3 进化与熵 …… 210
6.4 通过涨落的有序 …… 223

第七章 产业兴衰的耗散结构模型 …… 231～265
7.1 引言 …… 233
7.2 分工分业中的“涨落” …… 235
7.3 微观涨落怎样在宏观中获得稳定 …… 241
7.4 分工分业的“涨落机制” …… 249
7.5 宏观产业政策的原则——自组织控制 …… 251
7.6 无涨落机制的分工分业的教训 …… 256

第八章　产业兴衰的数学分析 …… 267～284

8.1　分工分业的分支点 …… 269

8.2　一个部门的增长模型 …… 273

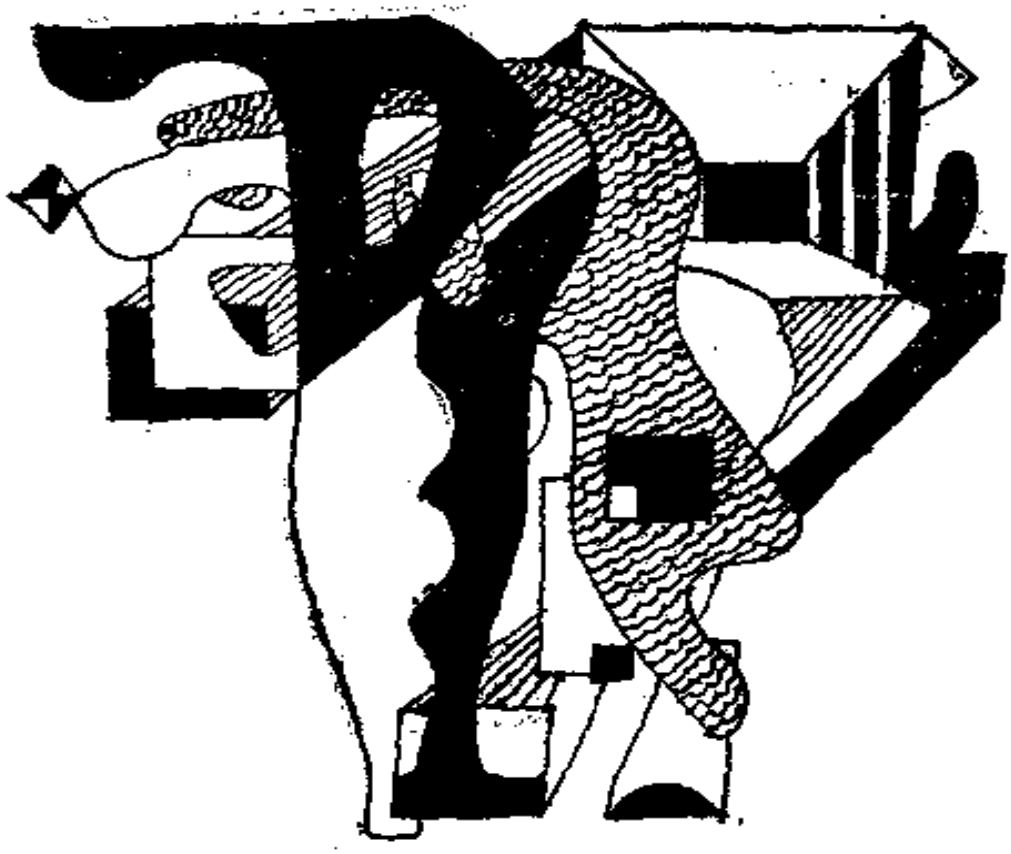
8.3　新产业的产生及产业结构的变化 …… 276

8.4　分工的连锁效应 …… 282

结语 …… 285～290

附录 A　向量、矩阵、行列式 …… 291～314

附录 B　矩阵的特征值和特征向量 …… 315～317



第一章

经济系统的状态空间表示

引入经济系统的状态空间表示，可以对各种形式的经济系统统一用数学来表述，从而为运用现代控制理论的一般方法分析经济系统奠定基础，并为定量地研究经济系统的一些重要性质作好准备。

不了解线性代数内容的读者，在阅读本章前可先翻阅本书的附录。

1_1 基本概念

在经济学领域内引入状态空间这个概念，对于不熟悉系统理论的读者似乎是件新鲜事。其实，状

态空间本身乃是一般地描述系统运动的数学工具，只要对物理空间中的“运动”的涵义稍加拓广，就不难理解状态空间中的系统运动。在力学中，“运动”这一概念是用来表示实际空间中物体随时间推移而发生的位置移动（或变化）的。在经济系统中，“运动”这一概念则具有更普遍的涵义，它包含了一个经济系统随时间推移而发生的任何变化，即“运动”的内容更广泛、更抽象，更多地反映了构成经济系统的各个经济因素的变化，如人均国民收入、劳动生产率等因素的变化。

人们研究经济系统的目的，在于了解和预测经济系统所发生的变化，包括变化的性质和内容、方向和原因等，从而掌握控制或调节变化的方向和速度，使之向着人们所期望的目标发展。

为了精确而严格地描述经济系统的变化，揭示经济系统运动的规律，必须引入经济系统的状态这一概念，因为经济系统的变化就是指它的状态的变化。例如，一个制造零件的工业企业系统，如图1.1所示。它的主要部门是生产管理部门——接受用户订货，负责对各个车间和部门分配工作；生产零件的制造车间。其他还有：采购部门，负责原材料的供应；装运部门，负责发送成品。

的一种稳定化了的宏观结构，即在非平衡态下宏观系统的自组织现象。这一理论不仅为非平衡态热力学系统的研究创造了崭新的局面，而且为其他复杂系统，如生态系统、社会经济系统的演化或发展问题提供了一般分析的理论基础。近几年来，已有多方面的专家、学者对耗散结构理论的研究和应用产生越来越大的兴趣，并进行了许多有益的开拓性的探索。特别是顺应当代经济领域的急剧变革，其作用更令人瞩目。

耗散结构理论的基本思路是：寻求系统在非平衡状态下形成稳定有序结构的条件和机制，提出自组织过程的一般原理，肯定在演化或发展中的不确定性的意义、选择的意义。因此，它特别适用于研究动态系统的演化问题。

动态是世上万事万物的基本特征，也是社会经济活动的基本特征。粗略地讲，系统的动态有两大类，平衡动态（或曰动态平衡）和演化动态（或曰动态演化）。无论从哪方面或哪个层次上看，在经济活动中这两种动态都是交互存在、相互补充的。然而，以往的大多数经济学家却往往偏重于动态平衡问题，他们的形形色色的经济理论都是均衡理论的变种，用“均衡”这一线索可以贯穿其间。这在

（或称关系式，如$y=f(x)$中的f）来表示。在数学模型中，系统中的实体或元素通常并不明显地表现出来，表现的只是它们的某些属性，即由一批相应的变量来表示。一个系统往往有极大量甚至无穷多的属性，只有根据描述系统的目的才能确定系统的哪些方面是需要研究的，也才可以确定为鉴别实体所必需的那些属性，即一批特定的变量。如在上例中，我们所关心的是原材料、劳动力、产品数量等这样的一批变量，并不关心原子或分子的个数等这样一些变量。

以下我们给出几个基本概念的定义。

1.状态变量　经济系统的状态变量是确定经济系统状态的最小的一组变量，表以$z_1(t)$，…，$z_n(t)$。它们必须满足两个条件：（1）在任何时刻$t=t_0$，这组状态变量的值$z_1(t_0)$，…，$z_n(t_0)$表示系统在该时刻的状态；（2）只要系统的初始状态（即系统在初始时刻，如t_0时的状态）和它在$t\geqslant t_0$时的输入已给定，状态变量就能完全表征系统在将来的状态。这个定义有两点要求：一是状态变量要选足，否则就不能完全地描述系统的状态；二是不要因为过多的选择状态变量而造成某些量实际上是多余的。这也就是数学上所说的“完备

性”。此外，描述一个经济系统的状态变量可以有多种选择方式（即使是在同一个目的下描述同一个系统），究竟选哪一组变量作为一个系统的状态变量，得视实际情况而定。

2.状态向量　设一个经济系统有n个状态变量$z_1(t)$，…，$z_n(t)$，用这n个状态变量作为分量所构成的向量$z(t)=[z_1(t), \cdots, z_n(t)]$，即是该系统的状态向量。

3.状态空间　状态向量的所有可能值的集合称为状态空间。或者说，由z_1，…，z_n为实数轴组成n维空间，其中系统状态向量的可取值区域称为该系统的状态空间。系统在任一时刻的状态都可用状态空间中的一点来表示。

1.2 经济系统的状态空间表示

有一种类型的系统，它们虽然在时间上是连续动作的，但所观测或所关注的却仅仅是离散的时点上的情况。这种类型的经济系统比较多，因为经济系统的活动只有在单位时间内才有实际意义，所以只能从小时、日、月、季等来观测经济系统。如生

产过程、商品流通以及资金周转等都要经历一段时间，即使是一个操作，也有一个过程，因而需要一定的时间。在经济活动中，变量有意义的数值往往就是这样一个一个地离散出现的。这也是本书要着重描述离散型经济系统的一个重要原因。

1。二阶差分方程和经济系统

通常是用差分方程来描述离散时间的经济系统。差分方程中的变量，如x、y都是离散时间的函数。这也就是说，时间t取的都是整数，如0，1，2，…，而x和y都只在这些特定的时点上取值，如x_1，x_2，…，x_t，x_{t+1}，…；y_1，y_2，…，y_t，y_{t+1}，…。而在0至1或t至t+1这个间隔里，x、y都是常量。因此，差分方程中的变量正好可以表示经济系统的性质。下面是二阶线性差分方程的一例：

$$y_t=\alpha_1 y_{t-1}+\alpha_2 y_{t-2}+\beta x_{t-1} \qquad (1.2-1)$$

式中x、y都是标量（即不是向量），α、β是常数。我们称它为二阶，是因为t时的函数值y_t的确定取决于t－1、t－2时的y和x的值y_{t-1}、y_{t-2}和x_{t-1}，而不必追溯到t－3、t－4等以前时刻的y和x的值。也就是说，只要给出了t－1、t－2时的y和

x的值y_{t-1}、y_{t-2}和x_{t-1}，y_t的值就可以唯一地确定了。我们称它为线性，是因为这个方程中的变量x、y都是一次的，没有更高次的变量出现。两个一次变量之间的关系在笛卡尔座标中表示为直线。那末，这个二阶线性差分方程能否变成一阶差分方程组的形式呢？

为此，我们定义一个二维向量z_t，它的分量$z_1(t)$、$z_2(t)$表示如下：

$$z_1(t)=y_t$$

$$z_2(t-1)=z_1(t)-\alpha_1 y_{t-1}-\beta x_{t-1}$$

$$=z_1(t)-\alpha_1 z_1(t-1)-\beta x_{t-1} \qquad (1.2-2)$$

由上述(1.2—2)和(1.2—1)两式可推得：$z_2(t)=\alpha_2 z_1(t-1)$。写成向量的形式为：

$$\begin{cases} z_t=Az_{t-1}+bx_{t-1} \\ y_t=(1,0)z_t \end{cases} \qquad (1.2-3)$$

式中：$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 1\\ \alpha_2 & 0\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}\beta\\ 0\end{pmatrix}$。展开成分量方程组的形式就是：

$$\begin{cases} z_1(t)=\alpha_1 z_1(t-1)+z_2(t-1)+\beta x_{t-1} \\ z_2(t)=\alpha_2 z_1(t-1) \\ y_t=z_1(t) \end{cases}$$

通过上述步骤，一个二阶差分方程就变成为一

阶差分方程组，方程(1.2—3)就是方程(1.2—1)的状态空间表示。

例 1　商业循环模型

以某经济区域作为一经济系统，考虑其中的储蓄和投资行为，它们可以由下列数学方程式表示：

$$C_t = \alpha y_{t-1} \qquad (1.2—4)$$

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) \qquad (1.2—5)$$

$$y_t = C_t + I_t + g_t \qquad (1.2—6)$$

上式中，t 季度的消费C_t取决于t－1季度的产出y_{t-1}；α是常系数，表明产出中有多少用于消费。在 t 季度的投资I_t由行为方程(1.2—5)给出，它取决于这一期消费水平C_t与上一期消费水平C_{t-1}的差；β是常系数。产出y_t由(1.2—6)给定，其中g_t是政府在 t 季度对于商品和劳务的支出。(1.2—6)表明某一季度的总产出是由该季度的消费、投资和政府支出构成的。

将(1.2—4)和(1.2—5)代入(1.2—6)，便得到产出的二阶线性差分方程：

$$y_t = \alpha(1+\beta)y_{t-1} + \alpha\beta y_{t-2} + g_t \qquad (1.2—7)$$

这个方程说明，t 季度的产出由前两个季度的产出和该季度的政府支出所决定。与(1.2—1)不同的是，在这个方程中，y_t受到同期政府支出g_t的影

响（那里是x_{t-1}，即y_t受上期x_{t-1}的影响）。

这个二阶线性差分方程同样可以通过上述方法变换成一阶差分方程组，即本例中经济系统的状态空间表示。为此，令：

$$\begin{cases} z_1(t) = y_t - g_t = I_t + C_t \\ z_2(t-1) = z_1(t) - \alpha(1+\beta)y_{t-1} \end{cases} \quad (1.2\text{—}7')$$

则有：

$$\begin{cases} z_1(t) = \alpha(1+\beta)z_1(t-1) + z_2(t-1) \\ \qquad\qquad + \alpha(1+\beta)g_{t-1} \\ z_2(t) = -\alpha\beta z_1(t-1) - \alpha\beta g_{t-1} \end{cases}$$

于是，商业循环模型的状态空间表示是：

$$z_t = Az_{t-1} + bg_{t-1} \quad (1.2\text{—}8)$$

式中：$A = \begin{pmatrix} \alpha(1+\beta) & 1 \\ -\alpha\beta & 0 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} \alpha(1+\beta) \\ -\alpha\beta \end{pmatrix}$。而状态向量$z_t$与产出的联系如下式：

$$y_t = z_1(t) + g_t = (1.0)z_t + g_t \quad (1.2\text{—}9)$$

做变换，令$\hat{z}_1(t) = y_{t-1}$和$\hat{z}_2(t) = y_t$（1.2—9′），则将(1.2—8)和(1.2—9)变为：

$$\hat{z}_t = \hat{A}\hat{z}_{t-1} + \hat{b}g_t \quad (1.2\text{—}10)$$

$$y_t = (0,\ 1)\ \hat{z}_t \quad (1.2\text{—}11)$$

式中：$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$，$\hat{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$a_1 = \alpha(1+$

$\beta)$，$a_2 = -\alpha\beta$。

注意：z_t由(1.2—7′)定义，它不包括g_t，（但包括g_{t-1}）；而由(1.2—9′)定义的$\hat{z}_t$包括g_t，（但不包括g_{t-1}）。从这里也可以看出，对于一个经济系统的状态变量的选择不是唯一的，但(1.2—8)、(1.2—9)与(1.2—10)、(1.2—11)是等价的。

现在，让我们利用上面这些式子，引出一些重要的概念，并解释其中某些概念的经济意义。

方程组(1.2—4)、(1.2—5)和(1.2—6)称为经济系统的结构方程组，它描述了我们所关心的主要经济关系。方程(1.2—7)称为经济系统的运动方程。方程(1.2—10)称为经济系统的状态方程，它是描述系统状态变量与系统输入之间的关系的一阶差分方程组。方程(1.2—11)称为经济系统的观测方程或输出方程（亦可称为产出方程）。经济系统的输出或产出往往是该系统状态变量的某种组合，这由(1.2—11)来看是很明显的。

状态方程和输出方程合称经济系统的动态方程，这个方程就是经济系统(1.2—7)的状态空间表示。

在(1.2—10)中，$\hat{z}_t$称为系统在t时刻的状态向量。这时，状态向量的两个分量分别是系统在t

季度和$t-1$季度里的产出，这是用本期和上期的产出水平来表征系统状态的。而在(1.2—8)中，则是用系统本期的投资和消费水平$[z_1(t)=I_t+C_t]$与上期的产出水平$[z_2(t)=-\alpha\beta y_{t-1}]$来表征系统状态$z_t$的。

在(1.2—10)中，g_t称之为t时刻的输入或控制变量（也可以是向量），在经济学中称为政策变量或工具变量。这里g_t的经济涵义是明显的：政府通过改变政府支出以控制和调节经济系统的状态，并通过系统状态的改变来影响经济系统的产出水平。

在(1.2—11)中，y_t称为观测变量或输出变量（或向量），在经济学中称为产出变量(或向量)。它所表征的是一个经济系统的产出水平。

根据上述分析，一个经济系统的状态空间表示的一般步骤如下：（1）根据所研究的问题的性质和一些假设，写出经济系统的结构方程，这是正确运用状态空间方法的关键步骤；（2）整理出经济系统的运动方程；（3）选择适当的状态变量，将运动方程转换为系统的动态方程，即状态空间表示。一个经济系统的数学模型只要经过这几步，就可以表示为状态空间形式。

状态变量法是现代控制理论的基础，它突出了系统内部变化特征的重要性（状态也可以简单地理解为描述系统“内部”变化特征的一组变量），可以根据系统的输入、状态和输出之间的变化关系，对系统进行“输入—状态—输出”描述。这种描述通常称为状态空间表示，并可以框图表示（见图1.2）。

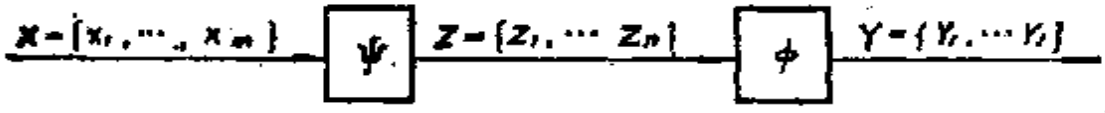


图1.2 状态空间表示的示意图

离散时间系统的标准表达式为：

$$z_{t+1} = \Psi(z_t,\ x_t)$$

$$y_t = \phi(z_t,\ x_t)$$

如果给定状态向量的初始值z_{t_0}和控制变量（或输入变量）在各个时刻的值x_{t_0}，x_{t_0+1}，…，x_t，则由上述方程就可唯一地确定状态向量z_{t_0+1}，…，z_{t_0}和输出向量y_{t_0}，y_{t_0+1}，…，y_t之值。

描述经济系统除了采用状态空间表示外，还可以采用输入—输出（或投入—产出）表示，以下简要介绍之。

以输入—输出表示来描述动态经济系统的主要特点，是将所考察的经济系统看成一个黑箱，即无须了解系统内部的运行状况和结构，只要通过对系统进行输入（“刺激”），来看系统的输出（“反应”）。这种只考虑系统的输入与输出之间的关系，而不考虑系统内部变化特征的描述方法，称为输入—输出表示法。这是经济控制论中的经典描述方法。

输入向量以x_{t_0}，x_{t_0+1}，…，x_t，…表示；输出向量将以y_{t_0}，y_{t_0+1}，…，y_t，…表示。输入向量序列$\{x_t\}$被看为是系统能够运行的“原因”或“外部激励”；输出向量序列$\{y_t\}$被看成是系统对输入或外部激励所产生的“效果”或“响应”。

输入向量x_t包括在时刻t所有可以进行调节或控制从而影响系统输出的变量；输出向量y_t包括在时刻t所有关心或可以测量的变量。

系统的输入—输出描述，可以用框图表示（见图1.3）。

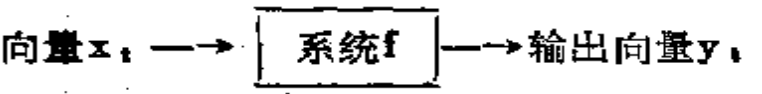


图1.3　系统的输入—输出描述

离散时间系统的输入—输出描述，通常表示成

如下的方程组：

$$y_t = f(y_{t-1}, \cdots, y_{t-j}, x_t \cdots, x_{t-i})$$

$$0 \leqslant i, \ j \leqslant t$$

其中：y_t——t 时的L维输出向量，$t = t_0, t_0+1, \cdots$；

x_t——t 时的m维输入向量，$t = t_0, t_0+1, \cdots$；

f(…)为L维向量值函数。

上式称为 j 阶的向量差分方程。如将上式中的时刻 t 看为现时刻，并假定与 t 时相接的前 j 个时刻的输出值（即$y_{t-1}, \cdots, y_{t-j}$）是已知的，若现时刻 t 及与之相邻的前 i 个时刻的输入值（即$x_t, \cdots, x_{t-i}$）也是已知的，则由上式可唯一地确定 t 时的输出值y_t。

实际上，(1.2—7)就是这种表示的一个具体例子，只不过那里的y、g都是标量罢了。

2.n阶差分方程与经济系统

让我们回顾一下二阶差分方程（1.2.7）：$y_t = \alpha(1+\beta)y_{t-1} + \alpha\beta y_{t-2} + g_t$。它的经济含义是很明显的：t 时的产出量$y_t$受前两个时期的产出量$y_{t-1}$、$y_{t-2}$的影响，同时还受到同期经济政策$g_t$

（政府支出）的影响。然而，在实际的经济活动中，产出量往往要受到以前多个时期的产出量和经济政策的影响。因此，我们必须建立高阶差分方程来描述它。

（1）标量型的n阶差分方程

现在考虑标量型的n阶线性差分方程，它只不过是二阶线性差分方程的推广，其式如下：

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_n y_{t-n} + \beta_0 x_t + \cdots + \beta_n x_{t-n} \qquad (1.2\text{—}12)$$

式中的诸x、y都是标量变量，诸α、β都是常数。某些β可以为0。例如，如果右边的诸x仅到第m个间隔，即m≤n，则有$\beta_{m+1} = \beta_{m+2} = \cdots = \beta_n = 0$。这里$\alpha_n \neq 0$，否则系统就不是n阶的了。

将这个方程与(1.2—7)对比一下，可以看出它的经济含义是：当前产出量y_t受到前n个时期产出量的影响；同时y_t不仅受到当前经济政策x_t〔在(1.2—7)中是g_t〕的影响，而且还受到以前n个时期的经济政策x_{t-1}，…，x_{t-n}的影响。这样，n阶差分方程就可以更好地反映经济系统运动的连续性以及经济政策的持续影响。

运用处理二阶差分方程的类似方法，同样可以将n阶差分方程变为n维向量的一阶差分方程组。为

此，定义n个标量变量$z_1(t)$，…，$z_n(t)$，它们是n维向量z(t)的n个分量。

令：

$$z_1(t) = y_t - \beta_0 x_t \qquad (1.2\text{—}13)$$

再定义：

$$\begin{aligned} z_2(t-1) &= z_1(t) - \alpha_1 y_{t-1} - \beta_1 x_{t-1} \\ &= z_1(t) - \alpha_1 z_1(t-1) - r_1 x_{t-1} \end{aligned} \qquad (1.2\text{—}14)$$

令：

$r_1 = \alpha_1\beta_0 + \beta_1$，重排（1.2—14）为：

$$z_1(t) = \alpha_1 z_1(t-1) + z_2(t-1) + r_1 x_{t-1}$$

类似地，可由下式定义z_{k+1}：

$$\begin{aligned} z_{k+1}(t-1) &= z_k(t) - \alpha_k y_{t-1} - \beta_k x_{t-1} \\ &= z_k(t) - \alpha_k z_1(t-1) \\ &\quad - y_k x_{t-1}, \end{aligned}$$

令：

$r_k = \alpha_k\beta_0 + \beta_k$（$k = 1, \cdots, n-1$），将上式重写为：

$$\begin{aligned} z_k(t) &= \alpha_k z_1(t-1) + z_{k+1}(t-1) \\ &\quad + r_k x_{t-1} \end{aligned}$$

最后，令：$z_n(t) = \alpha_n z_1(t-1) + r_n x_{t-1}$

其中$r_n = \alpha_n\beta_0 + \beta_n$

将上述诸式集中到对于z而言的一个一阶差分方程组的形式中，可以看出（1.2—12）已变为下式（1.2—15）：

$$z_t = Az_{t-1} + bx_{t-1} \qquad (1.2\text{—}15a)$$

$$y_t = (1,0,\cdots,0)z_t + \beta_0 x_t \qquad (1.2\text{—}15b)$$

其中：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ \alpha_n & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$r_i = \alpha_i\beta_0 + \beta_i, \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$z_t = z_t[(t), \cdots, z_n(t)]'$$

$$= \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$$

注意：（1.2—15b）表明向量Z_t是怎样将原变量y_t和x_t联系起来的。$[z_1(t), \cdots z_n(t)]'$其中的“′”，表示向量的转置。一阶差分方程组（1.2.15）就是描述经济系统的状态空间表式。

（2）向量型的n阶差分方程

迄今为止，在我们的讨论中，x和y都是标量变量。但是在实际经济运动中，经济系统的性质是

由许多因素决定的，因此通常x 和 y 都是向量。下面我们就来讨论这种更为一般的n阶线性差分方程，它也是(1.2—12)的推广，其方程如下：

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \cdots + A_n y_{t-n} + B_0 x_t + \cdots + B_n x_{t-n} + f_t \qquad (1.2—16)$$

其中：y_t是由许多个经济变量构成的L维向量，x_t是由许多个政策变量构成的$r(\leqslant L)$维政策向量即在某一时期 t，可以同时作出若干个不同的经济决策（如货币供给量、政府开支数量等），而f_t是某个不能控制的扰动外生向量（如气候和国际贸易等的变化）。

显然，(1.2—16)要比(1.2—12)能更好地反映经济系统的本来面目。而且，从形式上看，(1.2—16)与(1.2—12)没有很大的差别。所不同的是，在(1.2—16)中，变量都是向量，系数都是矩阵。如果把诸x、y和诸A、B从形式上看成是x、y和α、β，那末我们就可以将(1.2—12)式中的方法照搬过来。读者不妨将下面的推导与前面所做的加以对照。

定义L维向量如下：

$$z_t^1 = y_t - B_0 x_t + f_t \qquad (1.2—17)$$

$$z_{t-1}^{k+1} = z_t^k - A_k y_{t-1} - B_k x_{t-1},$$

$$k = 1, \cdots, n-1 \qquad (1.2—18)$$

将(1.2—17)代入(1.2—18)中，消去(1.2—18)中的y_{t-1}，便可得到：

$$z_{t-1}^{k+1} = z_t^k - A_k z_{t-1}^1 - (A_k B_0 + B_k) x_{t-1} - A_k f_{t-1}$$

或

$$z_t^k = A_k z_{t-1}^1 + z_{t-1}^{k+1} + (A_k B_0 + B_k) x_{t-1} + A_k f_{t-1},$$

$$k = 1, \cdots, n-1 \qquad (1.2—19)$$

从(1.2—18)中消去中间的那些z，便可以看出各个L维向量z与y_t、x_t的关系如下：

$$z_t^1 = y_t - B_0 x_t - f_t$$

$$z_{t-1}^1 = y_t - A_1 y_{t-1} - B_0 x_t - B_1 x_{t-1} - f_t$$

$$\vdots$$

$$z_{t-n+1}^n = y_t - A_1 y_{t-1} - \cdots - A_{n-1} y_{t-n+1} - B_0 x_t - \cdots - B_{n-1} x_{t-n+1} + f_t$$

由(1.2—16)，上面最后一个方程可被写为：

$$z_{t-n+1}^n = A_n y_{t-n} + B_n x_{t-n}$$

或

$$z_t^n = A_n y_{t-1} + B_n x_{t-1}$$
$$= A_n z_{t-1}^1 + (A_n B_0 + B_n) x_{t-1} + A_n f_{t-1} \qquad (1.2—20)$$

这个方程完成了(1.2—19)的动态递推关系。定义：

$$z_t = \begin{pmatrix} z_t^1 \\ \vdots \\ z_t^n \end{pmatrix}$$

其中：$z_t^i (i=1,2,\cdots,n)$为L维向量，因而z_t为$n \cdot L$维向量。这样$n \cdot L$维向量z_t的每个“分量”z_t^i可称为Z_t的L维子向量。

将(1.2—19)和(1.2—20)中所示的各项集中起来，便得到(1.2—16)的一个状态空间表示：

$$\begin{cases} z_{t+1} = Fz_t + Gx_t + \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} f_t \\ y_t = Hz_t + B_0 x_t + f_t \end{cases} \qquad (1.2—21)$$

其中：

$$F = \begin{pmatrix} A_1 & I & 0 \cdots 0 \\ A_2 & 0 & I \cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{n-1} & 0 & 0 \cdots I \\ A_n & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

$$H = (I,\ 0,\ \cdots 0)$$

$L \times r$矩阵R_i是由下式定义的：

$$R_i = A_i B_0 + B_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

I是单位矩阵，H中的那些0是零矩阵。

不难看出，如令$f_t = 0 (t = 1, \cdots)$，则(1.2—21)与(1.2—15)除了向量与矩阵的维数不同外，在(1.2—15)中z_t是n维，这对应于n阶和一维向量，即标量；在(1.2—21)中z_t是$n \cdot L$维的，这对应于n阶和L维向量)，方程的形式是完全一样的。状态空间表示法的优点就在于它为用标准的形式统一地研究各种各样的经济系统提供了便利。

按上述方式将n阶差分方程变为状态空间表示，可使状态空具有最小的维数。

(3)例子

例2　考虑下述短期宏观经济模型，

$$\begin{aligned} y_t = {} & (3.07y_{t-1} - 3.66y_{t-2} + 2.09y_{t-3} \\ & - 0.56y_{t-4} + 0.05y_{t-5}) + (1.14G_t \\ & - 2.53G_{t-1} + 1.38G_{t-2} + 0.59G_{t-3} \\ & - 0.79G_{t-4} + 0.18G_{t-5}) + (0.32M_t \\ & - 0.75M_{t-1} + 0.63M_{t-2} - 0.20M_{t-3} \\ & + 0.01M_{t-4}) + (0.05L_t - 0.11L_{t-1} \\ & + 0.06L_{t-2} + 0.02L_{t-4} = 0.03L_{t-4} \\ & + 0.01L_{t-5}) + \xi_t \end{aligned}$$

其中：y_t ——第 t 季度的国民总产值；

M_t ——第 t 季度的货币供给（即流通的货币加上活期存款）；

L_t ——第 t 季度的货币供给加上定期存款；

G_t ——第 t 季度的政府购买商品和劳务的支出加上外国净投资；

ξ_t ——趋势因子加上随机误差。

定义一个状态向量（其分量为 $z^1 \sim z^5$）和政策控制变量X（即通过货币政策变量 M_t、L_t 和财政政策变量G_t来控制和调节经济活动）如下：

令：

$$x_t = \begin{pmatrix} G_t \\ M_t \\ L_t \end{pmatrix}$$

令：

$$z_t^1 = y_t - 1.14\,G_t - 0.32\,M_t - 0.05\,L_t - \xi_t$$

$$z_{t-1}^1 = z_t^1 - 3.07\,y_{t-1} + 2.53\,G_{t-1} + 0.75\,M_{t-1} + 0.11\,L_{t-1}$$

$$= z_t^1 - 307 z_{t-1}^1 - r_{11}\,G_{t-1} - r_{12}\,M_{t-1} - r_{13}\,L_{t-1} - 3.07\,\xi_{t-1}$$

其中：$r_{11}=3.07\times1.14-2.53=0.97$

$r_{12}=3.07\times0.32-0.75=0.23$

$r_{13}=3.07\times0.05-0.11=0.04$

$$z_{t-1}^{3}=z_{t}^{2}+3.66y_{t-1}-1.38G_{t-1}-0.63M_{t-1}-0.06L_{t-1}$$

$$=z_{t}^{2}+3.66z_{t-1}^{1}-r_{21}G_{t-1}-r_{22}M_{t-1}-r_{23}L_{t-1}+3.66\xi_{t-1}$$

其中：$r_{21}=-3.66\times1.14+1.38=-2.79$

$r_{22}=-3.66\times0.32+0.63=-0.54$

$r_{23}=-3.66\times0.05+0.06=-0.12$

$$z_{t-1}^{4}=z_{t}^{3}-2.09r_{t-1}-0.59G_{t-1}+0.20M_{t-1}-0.02L_{t-1}$$

$$=z_{t}^{3}-2.09z_{t-1}^{1}-r_{31}G_{t-1}-r_{32}M_{t-1}-r_{33}L_{t-1}-2.09\xi_{t-1}$$

其中：$r_{31}=2.09\times1.14+0.59=3.97$

$r_{32}=2.09\times0.32-0.20=0.47$

$r_{33}=2.09\times0.05+0.02=0.12$

$$z_{t-1}^{5}=z_{t}^{4}+0.56y_{t-1}+0.75G_{t-2}-0.10M_{t-2}+0.03L_{t-2}$$

$$=Z_{t}^{4}+0.56Z_{t-1}^{4}-r_{41}G_{t-1}-r_{42}M_{t-1}-r_{43}L_{t-1}+0.56\xi_{t-1}$$

其中：$r_{41}=-0.56\times1.14-0.75=-1.39$

$r_{42}=-0.56\times0.32+0.01=-1.78$

$r_{43}=-0.56\times0.05+0.03=0$

最后：

$$z_t^{5}=0.05y_t+0.18G_{t-1}+0.01L_{t-1}$$

$$=0.05z_{t-1}^{1}+r_{51}G_{t-1}+r_{52}M_{t-1}$$

$$+r_{53}L_{t-1}+0.05\xi_{t-1}$$

其中：$r_{51}=0.05\times1.14+0.18=0.24$

$r_{52}=0.05\times0.32=0.16$

$r_{53}=0.05\times0.05+0.01=0.01$

由此，一个状态空间方程由下式给定：

$$z_t=Az_{t-1}+Bx_{t-1}+f\xi_{t-1}$$

$$y_t=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)z_t+1.14Gt$$

$$+0.32M_t+0.05L_t+\xi_t$$

其中：

$$A=\begin{pmatrix} 3.07 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -3.66 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2.09 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -0.56 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0.97 & 0.23 & 0.04\\ -2.79 & -0.54 & -0.12\\ 3.97 & 0.47 & 0.12\\ -1.39 & -1.78 & 0.00\\ 0.24 & 0.16 & 0.01 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 3.07 \\ -3.66 \\ 2.09 \\ -0.56 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

由此，我们就把短期宏观经济模型的运动方程变换为状态方程。运用状态方程，更便于全面地把握宏观经济活动的规律。

1_3 动态经济系统的求解问题

状态方程一方面突出了经济系统内部变化的特征，一方面以数学形式把系统的状态和它的历程及系统的输入联系起来，因此它更便于求解系统的状态。这也正是对于一个经济系统的数学模型采用状态空间表示的重要原因。由上节的分析可见，一个经济系统的数学模型总可以经由适当步骤化为状态空间表示，这为以一般的形式求解模型提供了基础。以下我们着重介绍通过状态方程求解经济系统的常用方法。

1。线性时不变经济系统的求解

设经济系统的状态方程为：

$$z_{t+1} = Az_t + Bx_t$$

考虑经济系统的变量是在 $t = kT$ 时刻取值。其中k是任意整数；间隔T 称作时间单位，它既可以是单位时间间隔（这时$t = k$），也可以不是单位时间间隔。当然，T也可不必是常数，可以是变化的（即随着时间的推移，间隔可忽大忽小，也即间隔的长短是时间的函数）。但这里假定 T是常数。这样上述系统的状态方程化为：

$$z[(k+1)T] = Az(kT) + Bx(kT)$$

其中：$z(kT)$——n维状态向量；

$x(kT)$——m维输入向量；

A——$n \times n$常数矩阵；

B——$n \times m$常数矩阵。

所谓时不变，是指A、B的元素是常数，不依时间而变，否则就称为时变系统。时不变的经济含意是，一些重要的经济参数没有变化或变化很小。尽管这是一种粗糙的近似，但对于很多短期经济问题，仍有其现实意义。

差分方程可用递推法求解。

以下是利用递推解法来解离散状态方程的一般步骤。

设经济系统的状态方程的一般形式为：

$$z[(k+1)T] = Az(kT) + Bx(kT) \qquad (1.3—1)$$

在方程中依次令 $k = 0, 1, 2, \cdots$，得到：

$$z(T) = Az(0) + Bx(0) \qquad (1.3—2)$$

$$z(2T) = Az(T) + Bx(T) \qquad (1.3—3)$$

$$z(kT) = Az[(k-1)T] + Bx[(k-1)T] \qquad (1.3—4)$$

把方程(1.3—2)代入(1.3—3)，如此继续下去，则由以上方程给出：

$$z(T) = Az(0) + Bx(0)$$

$$z(2T) = A^2z(0) + ABx(0) + BX(T)$$

$$\begin{aligned} z(kT) &= A^kz(0) + A^{k-1}Bx(0) + A^{k-2} \\ &\quad Bx(T) + \cdots + ABx[(k-2)T] \\ &\quad + Bx[(k-1)T] \\ &= A^kz(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bx(iT) \end{aligned} \qquad (1.3—5)$$

这就是每一时期经济系统的具体状态。

例3　动态多部门再生产模型的一般解动态多

部门再生产模型的状态方程为：

$$z(k+1)=Az(k)+x(k) \qquad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

其中：$z(k)$——k时刻各部门总产品向量；

$x(k)$——k时刻各部门最终产品向量；

A——生产资料消耗系数矩阵。

解：令T为单位时间隔（即令 $T=1$），并将(1.3—1)中的 $Bx(kT)$看为这里的 $x(k)$，利用(1.3—5)式求得这个模型的解为：

$$z(k)=A^k z(0)+\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}x(i),$$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$。

还有一种解离散状态方程的方法，叫特征值解法。

从求数值解的角度看，用递推法给出的解已经足够满足要求了。但是这种解的表达式对于研究动态系统的一些重要性质（如稳定性），在使用上还不够方便，因而需要用特征值解法。其步骤如下：

考虑线性齐次方程$z(k+1)=Az(k)$，其解为$z(k)=A^k z(0)$。这里“齐次”的含意是，经济系统不受外来输入的影响，或者说决策者对经济系统不进行任何干预。

设A是$n\times n$常数矩阵，$\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$是A的n个

互不相同的特征值。U_1、…，U_n是对应于λ_1，…，λ_n的特征向量。由特征值与特征向量的定义有：

$$AU_i = \lambda_i U_i \quad i = 1, \cdots, n$$

因为λ_1，…，λ_n互不相同，所以U_1，…，U_n线性无关，并构成n维向量空间R^n的一组基。于是R^n中任一个向量z均可表成U_1，…，U_n的线性组合。设$z(0) \in R^n$，则它可表为U_1，…，U_n的线性组合：

$$z(0) = \alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_n U_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i$$

其中，α_1，…，α_n表示向量z(0)在以U_1，…，U_n为基座标的特征向量座标系中的座标。将这个结果代入$z(k) = A^k z(0)$中，得：

$$z(k) = A^k z(0) = A^k \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i = A^{k-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$AU_i = A^{k-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i U_i \quad A^{k-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda$$

$$\alpha_i AU_i = A^{k-2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^2 U_i = \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k U_i$$

当然，特征值解法和递推解法求出的解是一样的。

2.线性时变经济系统的解

以上介绍的是线性时不变经济系统的求解方法。但对于实际经济系统而言，状态方程中的系数矩阵A和B往往是随时间(t)而变的。例如在商业循环模型中的消费系数α，实际上并非常数，而是时间的函数α(t)。时不变只有在短期或变化慢的情况下才是合理的抽象。因此，我们必须研究时变的经济系统。对此，求解当然更复杂，但采用递推方法仍可得到类似时不变经济系统的一般求解步骤。下面简要地介绍线性时变经济系统的求解结果。

首先考虑齐次（即没有输入对系统发生作用）的情况。状态方程及初始条件如下：

$$z_{t+1} = A(t)z_t \quad 及 \quad z_{t_0} = z^0$$

其中：A(t)是n×n矩阵。上述方程的解如下：

$$z_t = \phi_{t,\ t_0} z^0$$

其中：

$$\phi_{t,\ t_0} = A(t-1)\phi_{t-1,\ t_0} = \cdots$$
$$= A(t-1)A(t-2)\cdots A(t_0)$$
$$\phi_{t_0,\ t_0} = I\ (\text{单位矩阵})$$

这个解可由递推法得出。

对于非齐次的情况：

$$z_{t+1} = Az(t)t + B(xt),$$

其解是：

$$z_t = \phi_{t,t_0} z_{t_0} + \sum_{s=t_0}^{t-1} \phi_{t,s+1} B(s)x,$$

其中：$\phi_{t,s}\phi_{s,t_0} = \phi_{t,t_0}$

1.4 小结

在这一章里，我们分析了如何建立一个经济系统的状态空间表示，并且讨论了利用系统的状态空间表示来求解的问题。状态空间方法确实是一种有力的工具。

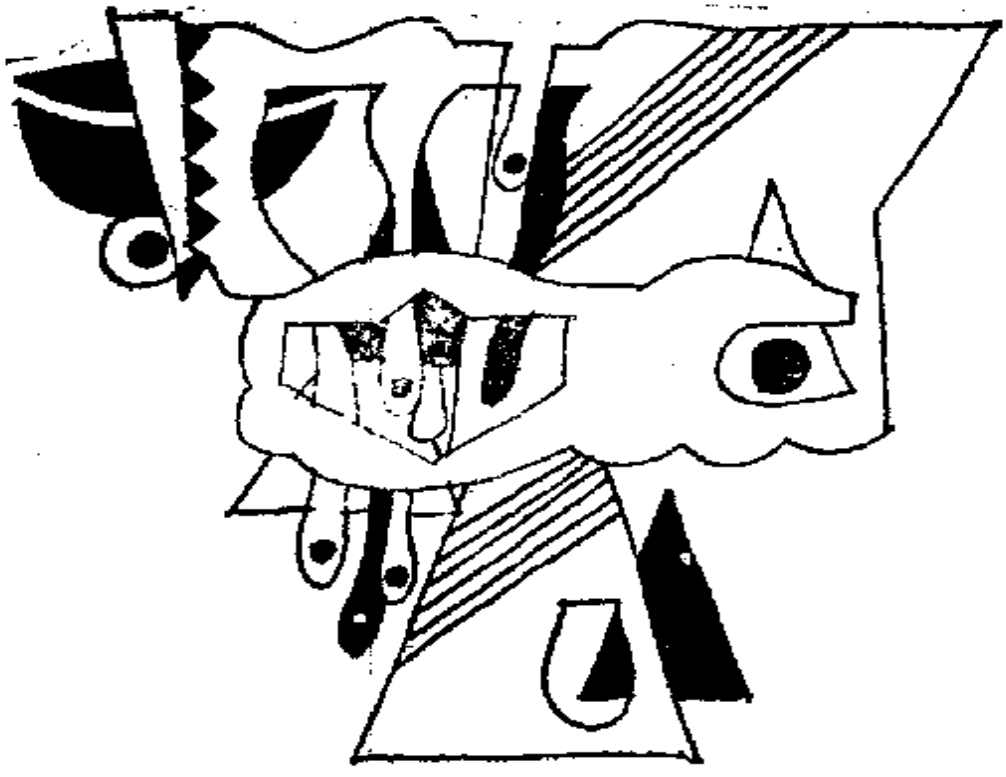
但是，社会经济系统要比物理、化学系统复杂得多，在某些情况下，它的状态变量是未知的，或者是难于确定的。例如，买进一辆旧汽车时用以表征汽车状态的状态变量，我们感兴趣的一些变量是诸如轮胎、发动机等有关车辆状态好坏的情况。当给定将来的输入（如正常驾驶）时，这些状态变量的值（如轮胎、发动机的好、坏程度）就决定了将来的输出值（如该车的耐用性等）。实际上，我们总是根据这些状态变量的值来决定买或不买。但是，

我们很难由察看到的汽车的“状态”来完全决定它将来的性能（请回顾一下关于状态变量所必须满足的两个条件）。

因此，对于复杂的经济社会系统来说，状态空间方法并不能包打天下。问题并不出在状态变量的定义上，而在于难以正确地建立复杂系统的状态变量。事实上，我们总是根据一定的研究目的，在对经济现象的主要特征进行正确地定性分析之后，才能抽出其中关键性的变量及其联系，进而建立起系统的状态方程。这种抽象当然是一种近似，但好的抽象所造成的误差不影响我们对问题的解答。这里关键之点就在于我们对建立模型的前提（即系统的结构方程）把握得如何，对问题的性质有没有必备的认识，而这又与我们的经验、直觉、眼界、判断大有关系。一旦这一步正确地完成了，状态空间方法便大有用武之地。在以下几章，我们将凭借状态空间方法对经济系统的重要性质作进一步的研究。

需要指出的是，用状态空间方法分析实际经济系统不仅仅是为了求得经济系统运动的精确的数值解，更有意义的是它能为我们提供这样的信息：哪些是影响系统状态的主要因素，各因素之间如何制

约以及制约的程度有多大。这就是定量模型的定性分析功能。由此，当我们面临错综复杂的经济现象时，在头脑中就可以保持一个清晰的图像，不致于在采取对策时顾此失彼。



第 二 章

动态经济系统的可控性和可观性

为了有效地运用经济系统的数学模型，必须对反映系统模型的一些主要性质有一个深刻而确切的认识。也就是说，要对系统的动态性质给予数量上的刻画。这些主要性质为可控性、可观性和稳定性。

在这些重要的性质之间有着密切的联系。我们将会看到，如果动态经济系统具有可控性和可观性，那末在一定的条件下就可以建立起对于该系统的稳定性决策。可控性、可观性和稳定性是非常有用的概念，它们以简洁的方式描述了动态经济系统的性能以及系统运行的限制性因素。

2.1 可控性和可观性的直观涵义

引入系统的可控性和可观性概念，是现代控制理论分析动态系统性质的一个重要方面，也是人们更加深入而准确地认识控制和调节问题的重要标志。

人类在许多学科的发展过程中往往都碰到一些同样的问题，即所要解决的课题的可解性。比如数学，这是一门历史最悠久的学科，在人类文明初见端倪之时就有了数学问题。千百年来人们不断地提出数学难题、解决数学难题，但却没有考虑到所提出的难题究竟是否有解。难题的有解性直至高斯的时代才作为数学上的一个课题正式地提了出来。对于系统的控制和调节来讲，也有类似的问题。任何事物的存在和发展都有一定的条件，并不是所有系统都是可控的，对于复杂的社会经济系统更是如此。同样，系统的各种性质也并不都是可直接观测的，而且不可直接观测的量也并不一定都能通过可直接观测的量来确定。因此，需要一般地提出系统的可控性和可观性概念，并且需要对它们作一般的

理论分析（或数学表示）。

举一个简单的例子来说明可控性问题。对于农业系统来讲，只要现有的技术力量限制在一定的水平内，某些不可把握的自然因素（如天气）对作物收成的影响将是不可抗拒的。因此，从收益（年成）的角度来看，不管经济政策如何，农业系统总有不可控的方面。其他经济系统也往往涉及可控与不可控的问题，或者涉及在什么条件下，在多大程度上可控的问题。只要从控制和调节的眼光来看待经济现象，系统的可控性就是系统整体的一个基本性质。

人们通常是通过实施决策来对经济系统加以控制和调节的，而系统的可控性是动态性决策的存在条件。然而，经济系统是复杂的系统，要从数学上严密地讨论它的可控性，同样是一个复杂的课题。我们这里仅限于讨论确定性动态经济系统的可控性。所谓确定性动态经济系统，指的是这样的系统，即它在变化过程的每一步中都唯一确定地取其状态集合中的一个状态（关于系统的确定性和不确定性，在第六章中还要讨论）。我们称一个确定性动态经济系统$z_{t+1}=f(z_t, x_t)$在t_0时是（完全）可控的，如果对每一对初态（z_0）和终态（z_N）

存在一个可行的政策变量序列$\{x_t\}$（x_t定义在$t_0, \cdots, t_N$上），使得系统从t_0的状态z_0移向t_N时的状态z_N。不严格地说，动态经济系统的可控性和这样的性质有关，即政策控制变量（或输入变量）影响或调节系统动态行为的能力。与此相应的问题是：如何建立或制定经济政策来控制经济系统，以达到所考虑的目标集合。

可观性的概念是同等重要的。实际上，这个概念是与可控性相对应的。更直接地说，可观性和这样的性质相关，即由一些可观测的数据和资料来获得经济系统的一些不能被直接观测到的数据和资料。

一般讲，只要把系统在任一时刻的状态都描述出来，就能够最明确、最有效地反映出系统的动态性质。但系统的状态变量往往不能直接观测到，这就需要用一些可观测的量来间接地确定它们。这些可观测的量可以是系统的输出，也可以是其他的量。现在的问题是能不能通过这些可观测的量来确定系统的状态以及在什么条件下才有这种可能？这就是系统的可观性问题。例如，在分析一个工业企业的管理水平时，系统的状态反映的就是管理状况，可以选择这样一些性质来描述：企业管理者的工作效率，企业各部门设置的合理性，企业工作人

员的积极性，以及发生事故的频率、解决问题的速度等等。这些性质虽然直接涉及到管理状况，但是往往不能（或难以）直接测量，于是就得设法通过另一些可观测的量来确定它们。这些可观测的量可以选为系统的输出，如总产值、净产值、人均产值、盈利率等等。然而，这些可观测量究竟能否确定系统的状态变量，从而准确地反映企业的管理水平，就涉及到系统的可观性了。

人们常说的透过现象看本质，也是一个可观性问题。这里现象是系统的输出，本质是系统的内部特征，即状态。本质或状态一般绝非一目了然，否则就不存在可观性的问题，也不需要有科学了。本质或状态必须通过现象或输出来表现，因此可观性的问题就是要回答现有的对现象的观察和认识是否足以使人们认识本质，通过哪些现象来把握本质。

以下几节介绍有关确定性的线性经济系统的可控性和可观性的一般理论。

2.2 线性动态经济系统的可控性

所谓可控性，是指经济系统的一种内在性质，

即经济系统在政策变量（或称控制变量，输入变量）的作用下，它的内部状态转移的能力。这种能力当然越强越好。下面先看一个例子。给定一个经济系统的状态方程〔其涵义见1.2.1的(1.2—8)式〕如下：

$$z_t = Az_{t-1} + bg_{t-1}$$

我们看看，根据它是否可以确定系统的可控性。为了突出问题的本质，对其中的诸参数赋值，而不去问这些值有无经济上的意义和合理性。这样，上述模型变为：

$$\begin{pmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} g(k)$$

设其在$t=0$时的初始状态为：

$$z(0) = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

利用递推法，容易得到其在第1步、第2步、…、第k步的状态：

$$\begin{pmatrix} z_1(1) \\ z_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+g(0) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} z_1(2) \\ z_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+g(0)+g(1) \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$\begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+g(0)+\cdots+g(k-1) \end{pmatrix}$$

由此看出，系统的状态向量的第一个分量z_1，永远不受政策变量g的影响，无论g的作用是大还是小。从直观上看这也是明显的，因为$b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$的第一个元素是0，所以政府支出g(k)对第一个状态变量$z_1(k)$没有施加影响的通道。因此，这样一个经济系统不能通过政策输入的控制作用而转移到任意所需的状态。

可见，不是任何经济系统都可以随意加以控制的，这与人们的直观常识也是没有矛盾的，因此有必要研究一个经济系统为具备可控的性质，究竟需要满足哪些条件。这就是本节所要解决的问题。

1.线性动态经济系统的状态可控性（状态空间可控性）

给定一个经济系统和政策控制变量的集合（即一系列政策的总和），在某个初始状态z_0，经由使用可行的（即具有确定的经济意义的）政策控制变量值，问：该经济系统能否在某个有限的时间里被引至预期的状态目标？这对于制定政策的决策者来说，是一个十分自然而又极其重要的问题。

不严格地说，如果答案是肯定的，那末经济系

统相应于政策控制变量值的允许集合（即不违反既定经济约束的政策系列）是可控的。如果经济系统在任何初始时刻和任何初始状态，都可以在有限的时间里被导入规定的任何目标状态，则说可控是完全的。因而我们必须选择一个政策控制变量集合，使得经济系统一直是完全可控的。

考虑多输入的n阶线性时不变离散经济系统，其状态方程为：

$$z(k+1)=Az(k)+Bx(k) \qquad (2.2-1)$$

其中：$z(k)$——n维状态向量；

$x(k)$——m维政策控制变量；

A——$n\times n$常系数矩阵；

B——$n\times m$常系数矩阵。

现在要研究这种类型的系统能否加以控制。为使问题明确，给予如下定义。

定义 1 对于给定的线性系统(2.2—1)，如果存在政策控制变量序列 $x(k)=\begin{pmatrix}x_1(k)\\ \vdots \\ x_m(k)\end{pmatrix}, x(k+1)=\begin{pmatrix}x_1(k+1)\\ \vdots \\ x_m(k+1)\end{pmatrix},\cdots, x(N-1)=\begin{pmatrix}x_1(N-1)\\ \vdots \\ x_m(N-1)\end{pmatrix}$，使得系统从第k步的某一状态 $\bar{z}(k)$ 开始，能在第 N

步上到达任一状态z(N)，其中N是大于k 的某一个有限正整数，则称该系统在第k步上是可控的，$\overline{z}(k)$称为第k步上的可控状态。如果在第k步上，系统的任何状态z(k)都是可控的，则称系统在第k步上是完全可控的。如果对于任何一个 k，系统都是完全可控的，则称系统是完全可控的，简称系统可控或系统具有可控性。

例 1　给定系统为：

$$z(k+1) = Az(k) + bx(k)$$

（x(k)是标量变量）

这个方程的经济含意可由运动方程$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \alpha_3 y_{t-3} + \beta_0 x_t$加以说明〔参考(1.2—12)〕，这是一个三阶线性差分方程，表示本期产出受到前三期产出和同期政策的影响。通过前述方法，它可以变成这里的一阶差分方程组，其中矩阵 A，向量b和初态z(0)分别为：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad z(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

问：能否选定控制信号序列（或政策序列）x(0)，x(1)，x(2)，使系统在第 3 步上转移到零状态？

解：利用递推法，可得：

$$z(1)=Az(0)+bx(0)=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}x(0)$$

$$z(2)=Az(1)+bx(1)=A^2z(0)+Abx(0)+bx(1)$$

$$=\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}x(0)+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}x(1)$$

$$z(3)=Az(2)+bx(2)=A^3z(0)+A^2bx(0)+Abx(1)+bx(2)$$

$$=\begin{pmatrix}2\\12\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}x(0)+\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}x(1)+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}x(2)$$

现在设 $z(3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$（即要求第三步上转移到零状态），看能否求出x(0)，x(1)，x(2)来。这取决于下述方程是否有解，即：

$$-\begin{pmatrix}2\\12\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}x(0)+\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}x(1)$$

$$+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}x(2)$$

上面的方程按矩阵乘法可以写为：

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&0\\-3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-12\\-4\end{pmatrix}$$

这个方程的系数矩阵的秩等于3，所以有解。由简单矩阵运算得：

$$\begin{pmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\11\\-8\end{pmatrix}$$

这表明：如果选$x(0)=-5$，$x(1)=11$，$x(2)=-8$，就能在第三步上使系统转移到零状态。

例2　其他同上例，但向量b变为：

$$b=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

问：能否在第3步上把系统转移到零状态？

解：参照上例，易算出：

$$z(3)=\begin{pmatrix}2\\12\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}x(0)+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}x(1)$$

$$+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}x(2)$$

或

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-12\\-4\end{pmatrix}$$

这个方程的系数矩阵的秩等于1，是不可逆矩阵，因此方程组无解。这表明，对于例2不能选出控制变量序列x(0)、x(1)和x(2)，使得系统在第3步上转移到零状态。从例1和例2的比较不难看出，对于同样的经济系统，怎样安排政策变量，会产生不同的控制效果。

从例2可自然地提出一个问题，即能否选出控制信号序列x(0)、x(1)、x(2)、x(3)，使得系统在第4步转移到零状态。若第4步不能，那末在第5步乃至更多步上行不行呢？结论是：对于一个n阶的时不变系统来说，若不能选出控制信号序列x(0),x(1), …,x(n−1),使它在第n步上转移到零状态，那末在任何步上也不能使它转移到零状态。

定理1 线性时不变离散系统

$$Z(k+1)A = z(k) + Bx(k) \qquad (2.2—2)$$

完全可控的充分必要条件是：

$$\rho[B,\ AB,\ \cdots,\ A^{n-1}B] = n \qquad (2.2—3)$$

上式左端的矩阵是个$n \times nm$矩阵，称为系统(2.2—2)的可控性矩阵。当上述条件满足时，称矩阵对 $\langle A \mid B \rangle$ 是可控的。

定理1也称为系统(2.2—2)的可控性判据。易见，系统的可控性与系统的输出方程无关。

用这个定理判别上两例的可控性与直接计算的结果是完全吻合的，读者可自行做出。定理证明从略。

推论：线性时不变离散系统

$$z(k+1) = Az(k) + bx(k)$$

完全可控的充分必要条件是：

$$\rho[b,\ Ab,\ \cdots,\ A^{n-1}b] = n$$

上式左端的矩阵是$n \times n$方阵。此一条件也可叙述为：可控性矩阵是可逆的。

在这种情况下，控制变量是标量，b是$n \times 1$的列向量。有唯一解。

下面研究线性时变离散系统，这种系统的状态方程如下：

$$z_{t+1} = A_t z_t + B_t x_t$$

式中：z_t——n维状态向量；

x_t——m维输入控制向量；

A_t——变系数$n \times m$矩阵；

B_t——变系数$n \times m$矩阵；

则有：

$$z_{t+s} = \phi_{t+s,t}\ z_t + Q_{t+s,t}\ x_{t,t+s}$$

式中：$\phi_{t+s,t} = A_{t+s-1} A_{t+s-2} \cdots A_{t+1} A_t$

$$Q_{t+s,t} = [\phi_{t+s,t+1} B_t\ \phi_{t+s,t+2} B_{t+1} \cdots \phi_{t+s,t+s-1} B_{t+s-2} B_{t+s-1}]$$

$$x_{t,t+s} = \begin{pmatrix} x_t \\ x_{t+1} \\ \vdots \\ x_{t+s-1} \end{pmatrix}$$

此时，可控性问题可等价地变为下述方程的解的存在性问题（对给定的t）。

$$\xi = Q_{t+\tau,t} x_{t,t+\tau} \qquad (\text{对某个}\tau > 0)$$

也就是说，时变系统在t时是可控的，当且仅当 $\rho[Q_{t+n-1,t}] = n$或$[Q_{t+n-1,t} Q'_{t+n-1,t}]$可逆。

例3　检查商业循环模型(1.2—8)的可控性，它是在1.2.1中引入的，其方程如下：

$z_t = Az_{t-1} + bg_{t-1}$，其中$A = \begin{pmatrix} \alpha(1+\beta) & 1 \\ -\alpha\beta & 0 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} \alpha(1+\beta) \\ -\alpha\beta \end{pmatrix}$。由模型的建立可知：$\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$；由简单运算，可控性矩阵为：

$$[b,\ Ab] = \alpha\begin{pmatrix} 1+\beta & \alpha(1+\beta)^2 - \beta \\ -\beta & -\alpha\beta(1+\beta) \end{pmatrix}$$

将第一列$\begin{pmatrix} 1+\beta \\ -\beta \end{pmatrix}$乘以$-\alpha(1+\beta)$后，并加到第二列上，得：

$$\alpha\begin{pmatrix} 1+\beta & (1+\beta)[-\alpha(1+\beta)] + \alpha(1+\beta)^2 - \beta \\ -\beta & -\beta[-\alpha(1+\beta)] - \alpha\beta(1+\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} 1+\beta & -\beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

因为$\beta \neq 0$，所以可控性矩阵$[b, Ab]$的秩$\rho[b, Ab] = 2$，由定理1，可控性矩阵的秩为2，等于模型的阶数2（这里$n = 2$），所以商业循环模型是可控的。

2.动态经济系统的输出可控性

以上讨论的可控性是针对系统的状态而言的。但在实际经济生活中，有时需要加以控制的是系统

的输出，而不是系统的状态。这时我们仅关心经济系统能生产什么、生产多少，而不关心这种产出是通过怎样的过程生产出来的。因此有必要研究经济系统的输出可控性。

这时取代要求状态向量从任一点变到另一点的是：仅要求输出向量y可从任一初值点变到任一其他的点（当然，必须保证不包括这样两种情况：z，的某些分量为无穷大，或者违反经济上的限制因素），这就是完全输出可控性。

设经济系统的动态方程为：

$$\begin{cases} z(k+1) = Az(k) + Bx(k) \\ y(k) = Cz(k) + Dx(k) \end{cases} \qquad (2.2-4)$$

其中：z(k)——n维状态向量；

x(k)——m维输入控制向量；

y(k)——L维输出向量；

A——n×n常系数矩阵；

B——n×m常系数矩阵；

C——L×n常系数矩阵；

D——L×m常系数矩阵。

为使问题明确，给出下面的定义。

定义2 对于上述系统，若存在政策控制变量序列x(k)，x(k+1)，…，x(n)，使得系统从第

k步的某一给定的输出$\bar{y}(k)$开始，能在第N步上达到任意的输出y(N)，其中N是大于k的某一有限正整数，则称该系统在第k步上是输出可控的。如果在第k步上，系统的任何一个输出值y(k)都是可控的，则称系统在第k步上是完全输出可控的；如对任给的k，系统都具有这种性质，则称系统是输出完全可控的，简称输出可控的。

定理2 对于由方程(2.2—4)所确定的系统，其输出完全可控的充分必要条件是：

$$\rho[CB,\ CAB,\ CA^2B,\cdots,\ CA^{n-1}B,\ D]=L$$

上式左端的矩阵称为输出可控性矩阵。

推论 设上述动态方程中的D=0（即零矩阵），系统是输出可控的充分必要条件是：

$$\rho[CB,\ CAB,\ \cdots,\ CA^{n-1}B]=L$$

推论中的条件（即等式左边）也可写成$\rho[C(B,AB,\cdots,A^{n-1}B)]$。如果C的秩为L，$[B,\ AB,\ \cdots,\ A^{n-1}B]$满秩为n，则显然$C[B,\ AB,\ \cdots,\ A^{n-1}B]$的秩等于L(因为：$L\leqslant n$)。换言之，如秩C=L，且系统是状态可控的，则系统也是输出可控的。但对于输出可控来说，C的秩为L是必要的，而秩$[B,\ AB,\ \cdots,\ A^{n-1}B]=n$不是必要的，当然$\rho[B,\ AB,\ \cdots,\ A^{n-1}B]$不能小于L。

如果$D\neq 0$，则显然提供了输入到输出的直接通道（加上通过状态向量的间接通道），因而增加了输出的可控性。

例4　考虑商业循环模型的输出可控性，其输出方程为：

$$y_t=(1,\ 0)z_t+g_t$$

易见$C=(1,\ 0)$，$D=1$，输出可控性矩阵则为：

$$[Cb,\ CAb,\ D]=[\alpha(1+\beta),\ \alpha^2(1+\beta)^2-\alpha\beta,\ 1]$$

因为$1\neq 0$，可控性矩阵的秩等于输出变量y_t的维数（这里$L=1$），所以由定理2推出该系统还是输出可控的。

下面再来看一个例子。

例5　判定系统

$$\begin{pmatrix} z_1(k+1)\\ z_2(k+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(k)\\ z_2(k)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}x$$

$$y(k)=[1\quad 0]\begin{pmatrix} z_1(k)\\ z_2(k)\end{pmatrix}$$

是否具有输出可控性和状态可控性？

解：系统的输出可控性矩阵为：

$$[CB,\ CAB]=[1\ \ -2]$$

它的秩为1，等于输出变量的数目。所以，系统是输出可控的。

系统的状态可控性矩阵为：

$$[B,\ AB]=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$$

它的秩为1，不等于系统的阶数2。所以，系统是状态不可控的。

从上例可以看出，系统输出可控性并不必然意味着它的状态可控性，二者之间没有必然的联系。

下面我们再简单叙述一下绝对输出可控性。

实际上，有时决策者不仅对在某一时刻达到预期目标值（例如，计划某年达到钢产量x吨）感兴趣，而且也对使预定目标保持在某个预期的时间轨道上感兴趣（即决策者的目标是一个序列，例如，在五年计划中，第一年至第五年，每年的钢产量都有规定）。这种类型的控制比输出可控所要求的条件更多。

这种追踪预期时间轨道的条件就被称为绝对输出可控性。如果输出变量的维数是1，条件可化为在上面已研究的输出可控性条件。

在实际的经济活动中，绝对输出可控性的问题是经常可见的。例如，使国民经济的某些指标保持在逐年按比例增长的轨道上，就属于这类控制问题。

3。讨论

可控性的各种概念不考虑对于政策控制变量的各种形式的约束，而这些约束通常对于政策控制变量是有影响的。为了具有经济意义，政策控制变量必须满足各种约束，如关于政策控制变量在数值上的约束，或在改变率上的约束。但就可控性的概念而言，它们的定义不依赖于这些实际上是重要的约束，而只要求符合数学上的逻辑。无论我们所刻画的具有可控性的经济系统具有什么涵义，它只能是一种理想化的模型。其目的在于给可能的建模工作提供一个干净而单纯的背景。

当我们对政策控制变量加以量值上或改变率上的约束时（例如，控制变量x_t只能在某个范围内取值，即$|x_t|<M$），我们不可能在任一有限时间和区间上以任意的方式改变经济的“状态”，这时，通常能获得的仅是局部可控性的结果。关于局部可控的概念顾名思义，指的是一种较弱的可控性，这里不再介绍了。

2_3 线性动态经济系统的可观性

在实践中常会遇到这样的问题：经济系统的状态变量不能直接测量和观察，那末，能否根据系统的输出把这些状态变量确定下来呢？这就是系统的可观性问题。在现代控制理论中，如能通过输出变量把状态变量确定下来，则尽管这些状态变量不能直接观测，但仍可能用它们来进行反馈，从而实现最优控制。否则，只能用输出变量来进行反馈，那就难于获致最优的效果。

1.线性经济系统的可观性

现在考虑下述离散经济系统：

$$\begin{cases} z(k+1) = A(k)z(k) + Bx(k) \\ y(k) = C(k)z(k) \end{cases} \tag{2.3—1}$$

式中：$z(k)$——n维状态向量；

$x(k)$——m维输入控制变量；

$y(k)$——l维输出向量；

$A(k)$——$n \times n$系数矩阵；

B(k)——n×m控制矩阵；

C(k)——l×n观测矩阵(或输出矩阵)。

从输出方程[即(2.3—1)的第二个方程]可以看出，若在第i步上，观测矩阵的秩为n，则由第i步的观测y(i)就能唯一地确定出第i步的状态。若C(i)的秩小于n，那末由y(i)就不能把z(i)唯一地确定下来；当l<n时，便属于这种情况。这时要问，虽然不能由y(i)把z(i)唯一地确定下来，那末再加若干步的观测是否能把z(i)唯一地确定下来呢？这就是目前要解决的可观性问题。

定义3 对由上述方程(2.3—1)描述的系统，若根据第i步及以后若干步的观测y(i)，y(i+1)，…，y(n)，就能唯一地确定出第i步的状态z(i)，则称系统在第i步是可观的。若系统在任何一步上都可观测，则称系统是完全可观的，简称系统可观。

下面先看两个例子。

例6 判定下述系统是否具有可观性

$$\begin{pmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z_1(k)\\ z_2(k)\end{pmatrix}$$

其中：X(k)是给定的（这是因为要用它来实施控制）。

解：根据系统的观测方程和状态方程，不难得出：

$$y(i)=z_1(i)$$

$$y(i+1)=2z_1(i)+x(i)$$

$$y(i+2)=4z_1(i)+2x(i)+x(i+1)$$

由以上各式能把$z_1(i)$确定出来。实际上，只要利用上面第一式就行了，因为$x(i)$和$x(i+1)$都是已知的。但以上各式不能把$z_2(i)$确定出来，因为上述一系列观测方程中都不包含$z_2(i)$，即使再多取若干步观测也是如此。所以，系统是不可观测的。

例7　判定下述系统是否可观测

$$\begin{pmatrix}z_1(k+1)\\ z_2(k+1)\\ z_3(k+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1(k)\\ z_2(k)\\ z_3(k)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}x(k)$$

$$y(k)=[0\ \ 1\ \ 0]\begin{pmatrix}z_1(k)\\z_2(k)\\z_3(k)\end{pmatrix}$$

其中：x(k)是给定函数。

解：根据系统的观测方程和状态方程，可得

$$y(i)=cz(i)$$

$$y(i+1)=cz(i+1)=cAz(i)+cbx(i)$$

$$y(i+2)=cz(i+2)=cA^2z(i)+cAb$$

$$x(i)+cbx(i+1)$$

将矩阵A、b、c代入以上各式，得：

$$v(i)=[0\ \ 1\ \ 0]z(i)$$

$$y(i+1)=[0\ \ -2\ \ 1]z(i)-x(i)$$

$$y(i+2)=[3\ \ 4\ \ 0]z(i)+3x(i)-X(i\quad 1)$$

写成矩阵形式，可得：

$$\begin{pmatrix}y(i)\\y(i+1)+x(i)\\y(i+2)-3x(i)+x(i+1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-2&1\\3&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1(i)\\z_2(i)\\z_3(i)\end{pmatrix}$$

上式左端是已知向量，因为x(i)，x(i+1)是给定的，而y(i)，y(i+1)，y(i+2)是观测数据。

由此可知，由观测数据$y(i)$，$y(i+1)$，$y(i+2)$是否能唯一地确定出第i步的状态$z_1(i)$，$z_2(i)$，$z_3(i)$，其充分必要条件是矩阵

$$\rho=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

的秩为3。而矩阵P满足此一条件，所以系统在第i步上是可观的。因为所论系统是时不变的，上述推理对任何的i都成立，所以系统是完全可观的。

根据上述两个例子提供的直观背景，我们有如下的定理（证明从略）。

定理3 线性时不变离散系统

$$\begin{cases}z(k+1)=Az(k)+Bx(k)\\ y(k)=Cz(k)+Dx(k)\end{cases}\qquad(2.3-2)$$

其中：$x(k)$是给定的，系统(2.3—2)完全可观的充分必要条件是：

$$\rho\begin{pmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{pmatrix}=n$$

上式左端是个$nl\times n$矩阵，称为系统的可观性矩阵。当上述条件满足时，称矩阵对$\langle A\mid C\rangle$是可观的。

例 8　确定下述系统是否具有可观性

$$\begin{pmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x(k)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix}$$

解：系统的观测矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的秩为 2，因而可观性矩阵的秩必然为 2，所以系统是可观的。实际上，由于观测矩阵可逆，根据第 i 步的观测 $y(i)$，马上就可确定系统的第 i 步的状态 $z(i)$。

例 9　$z(k)$，$x(k)$，A，b同例 7，要确定下述系统是否可观。

$$z(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} z(k) + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} z(k)$$

解：系统的可观性矩阵

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

的秩小于 3，所以系统不可观测。

将例 9 与例 7 加以比较，可以发现一个有意思的问题：同一个系统，（例 9 ）观测数据多，是不可观的；（例 7 ）观测数据少，反而是可观的。这说明通过观测输出来确定系统的内部状态时，选择观测量——正确地确定观测矩阵，具有十分重要的意义。可见，观测并不是数据的堆积。

例10　确定商业循环模型的可观性

解：因为：

$$CA = (1,\ 0)\begin{pmatrix} \alpha(1+\beta) & 1 \\ -\alpha\beta & 0 \end{pmatrix} = [\alpha(1+\beta),\ 1]$$

所以该系统的可观性矩阵是：

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(1+\beta) & 1 \end{bmatrix}$$

易见这个矩阵的秩等于 2，与系统的阶数相等。由定理 3 可知商业循环模型是可观的。

2.可观性问题的经济意义

下面的例子将表明，对适当定义的“可观性”条件进行检验，可以揭示出一些未被估计到的影响。同时，这个例子还表明，在一个微观经济模型中，不可观性意味着存在并非唯一的平衡。

例　经济平衡的唯一性

考虑由n个企业组成的产业部门。这些企业全都生产一种同质的、非耐用商品。生产周期为一天，这使企业必须提前一天作出生产决策。由于这些企业提供给市场的商品不易贮存，每天都有一个唯一的市场结清价格（即在这个价格下，商品既不积压也不短缺）。由下式建立：

$$p_t = \gamma - \delta Q_t, \quad Q_t = \sum_{j=1}^{n} q_{jt}$$

其中：p_t是第t天的结清市场价格；γ、δ是常数；q_{jt}是由企业j在第t天提供给市场的商品量。

为简单起见，设企业是按下述关系式（即系统的状态方程）调整自己的生产数量，以适应市场价格的变化。

$$\Delta q_{t+1} = F\Delta q_t + g\Delta p_t$$

其中：F为$n \times n$矩阵，g为n维向量，n维向量

$\Delta q_t = q_{t+1} - q_t$, $q_t = (q_{1t}, \cdots, q_{nt})'$。易见，在这个方程中，市场价格的变化($\Delta p_t = p_{t+1} - p_t$)是控制变量。也就是说，市场价格的变化$\Delta p_t$影响着企业的生产决策。

进一步假设企业不形成联盟，这样他们就不知道其他企业的生产决策。这时，市场价格是企业可观测到的唯一信号。观测方程为：

$$\begin{aligned}\Delta p_t &= p_{t+1} - p_t \\ &= (\gamma - \delta Q_{t+1}) - (\gamma - \delta Q_t) \\ &= -\delta(Q_{t+1} - Q_t) \\ &= -\delta e' \Delta q_t\end{aligned}$$

其中：$e' = (1, 1, \cdots, 1)$是$1 \times n$的观测矩阵。

现在要问：如果在连续n天的时期里，市场价格p_t没有变化，那末每个企业的产量是否都在均衡点上？

由假设$\Delta p_t = \Delta p_{t+1} = \cdots = \Delta p_{t+n-1} = 0$，$\delta \neq 0$得到：

$$-\frac{1}{\delta}\begin{pmatrix}\Delta p_t \\ \Delta p_{t+1} \\ \vdots \\ \Delta p_{t+n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e'\Delta q_t \\ e'\Delta q_{t+1} \\ \vdots \\ e'\Delta q_{t+n-1}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e' \\ e'\phi \\ \vdots \\ e'\phi^{n-1} \end{pmatrix} \Delta q_t$$

其中：$\phi = F - \delta g e'$，并设$D = \begin{pmatrix} e' \\ e'\phi \\ \vdots \\ e'\phi^{n-1} \end{pmatrix}$。

因此，如果（F|e′）是一个可观对（即可观性矩阵的秩为n），则矩阵D的秩为n，这样我们就可断定$\Delta q_t = 0$，也就是说每个企业的产量都在均衡点上(或说每个企业的产量在n天里没有变化)。若可观性矩阵的秩小于n,则市场价格虽可连续n天保持不变,但却不是所有企业的产量仍然都能在均衡点上。

2_4 对偶原理

从上两节的讨论可以看出，判定一个系统的可控性与可观性的条件非常相似。如果把可观性条件

$$\rho \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n,$$

改写成$\rho[C', A'C', \cdots, (A')^{n-1}C'] = n$，则二者的相似性就更为明显。为了说明二者的关系，下面介绍卡尔曼建立的对偶原理。

考虑由下述方程描述的系统Σ_1：

$$z(k+1) = Az(k) + Bx(k)$$

$$y(k) = Cz(k)$$

和由下述方程定义的对偶系统Σ_2：

$$s(k+1) = A's(k) + C'p(k)$$

$$w(k) = B's(k)$$

其中：z与s的维数同为n，x与p的维数同为m，y与w的维数同为1。符号“′”代表转置。

现在容易写出系统Σ_1及其对偶系统Σ_2的可控性条件和可观性条件。

对于系统Σ_1：

1.状态完全可控的充要条件是$n \times nm$可控性矩阵的秩为n，即$\rho[B, AB, \cdots, A^{n-1}B] = n$。

2.状态完全可观的充要条件是$n \times nl$可控性转置矩阵的秩为n，即$\rho[C', A'C', \cdots, (A')^{n-1}C'] = n$。

对于系统Σ_2：

1.状态完全可控的充要条件是$n \times nl$可控性矩阵的秩为n，即$\rho[C', A'C', \cdots, (A')^{n-1}C'] = n$。

2.状态完全可观的充要条件是$n \times nm$可观性转

置矩阵的秩为n，即$\rho[B, AB, \cdots, A^{n-1}B] = n$。

对比这些条件，得到：

对偶原理 系统Σ_1的状态完全可控（状态完全可观）的充要条件，是其对偶系统Σ_2状态完全可观（状态完全可控）。根据此原理，一个系统的可控性(可观性)就可以借助对偶系统的可观性（可控性）来研究，反之亦然。

2_5 小结——经济系统的分解和描述

1.经济系统的分解

考虑下面的经济系统：

$$z_1(k) = -3z_1(k) + x(k) \qquad (2.5.1)$$

$$z_2(k+1) = -z_2(k) + 2x(k) \qquad (2.5.2)$$

$$z_3(k+1) = -2z_3(k) \qquad (2.5.3)$$

$$z_4(k+1) = -4z_4(k) \qquad (2.5.4)$$

$$y(k) = z_2(k) + z_3(k) \qquad (2.5.5)$$

或写成矩阵形式为：

$$z(k+1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} z(k)$$

$$+\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}x(k) \qquad (2.5.6)$$

$$y(k)=[0\ 1\ 1\ 0]z(k) \qquad (2.5.7)$$

易于判定，这个系统是既不可控又不可观的。但由前几节的结论易见：这个系统由方程(2.5.1)和(2.5.2)描述的子系统却是可控的；由方程(2.5.2)和(2.5.3)〔考虑观测方程(2.5.5)，下同〕描述的子系统却是可观的；自然，由(2.5.2)描述的子系统是既可控又可观的；而由(2.5.4)描述的子系统既无输入且与输出无关，因而是既不可控又不可观的。这样，就可把所研究的系统分成以下四个子系统：

1.既可控又可观的子系统Σ^A；

2.不可控但可观的子系统Σ^B；

3.可控而不可观的子系统Σ^C；

4.既不可控也不可观的子系统Σ^D。

事实上可以证明：任何系统Σ都可以分解为上述四个子系统，如2.1图所示。

还应指出，同一个系统由于选择的状态变量不同，它的分解也就不同。例如，一个系统当选择某

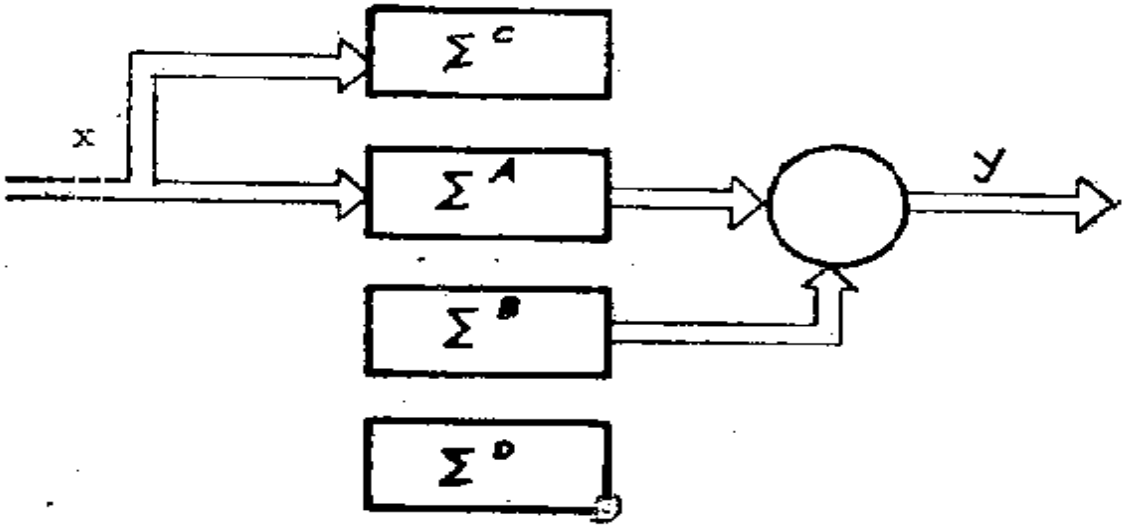


图2.1　系统的分解

组状态变量时，分解为Σ^A和Σ^B两个子系统，而选择另一组状态时，却分解为Σ^A和Σ^C两个子系统。现举例说明。

考虑由差分方程$z(k+2)+2z(k+1)+z(k)=x(k+1)+x(k)$描述的经济系统。先选$z_1(k)=z(k)$，$z_2(k)=z_1(k+1)-x(k)$，为一组状态变量，则系统的状态方程写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}x(k)$$

输出方程为：

$$y = z_1(k) = [1\ 0]\begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix}$$

系统的可控性矩阵$[B\ AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，是个不可逆矩阵，所以系统是不可控的。系统的可观性矩阵$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，是个满秩矩阵，所以系统是可观的。既然整个系统是可观的，当然不包含Σ^C、Σ^D在里面，因而整个系统可认为是由Σ^A和Σ^B组成的。

现在再选择$z_1(k) + z_2(k) = z(k)$，$z_2(k) = z_1(k+1)$，作为一组状态变量，这时系统的状态方程写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}x(k)$$

其输出方程为：

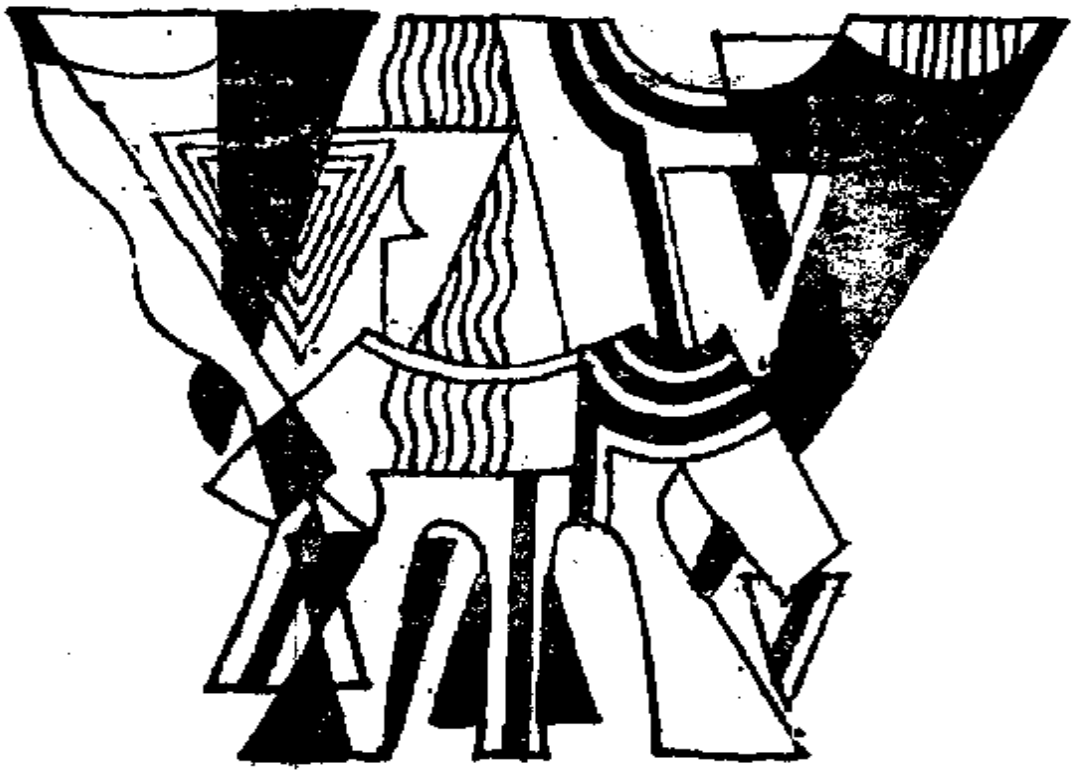
$$y(k) = z_1(k) + z_2(k) = [1\ 1]\begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix}$$

系统的可控性矩阵$[B\ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$，是个满秩矩阵，所以系统是可控的。系统的可观性矩阵

$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，是个不可逆矩阵，所以系统是不可观的。因而整个系统可认为是由Σ^A和Σ^C组成的。

2.经济系统的描述

总之，对于一个给定的经济系统，通常可以有两种描述方式。第一，如果我们能详细地剖析系统，把它的内在联系分解为实际存在的若干个一阶差分方程，那末我们就可以得到一个完备的状态描述，它包含了经济系统可能有的各种不可控或不可观的情形。这是现代控制理论的主要方法。第二，通过对经济系统的输入和输出进行观察，并予以记录，我们可以获得输入与输出的关系式，其中Σ^B、Σ^C和Σ^D都被略去了，但如果它们是实际存在的，我们便只得到了一个不完全的描述。这种方法就是经典控制论的黑箱方法。通过上述对可控性和可观性的分析，可知这种经典方法有很大的局限性。然而，在我们没有条件直接进行状态描述时，黑箱方法仍不失为一种可行的方法，但必须对它只能部分地反映系统的运行状况做到心中有数。



第 三 章

动态经济系统的稳定性

这一章研究动态经济系统的稳定性问题。稳定性的概念十分重要，可以说它丝毫不亚于经济系统的可控性和可观性。因为它关系到这样的问题：随着时间的推移，经济系统的实际响应是停留在所要求的响应附近，还是要发散出去？因此，系统的稳定性问题是控制和调节的基本课题。在一般情况下，如果一个经济系统是不稳定的，那就要采取外部措施使它稳定，这往往要利用下章所要讲到的反馈方法。

3.1 问题的提出

下面我们从一个例子开始，即经济学中的著名的蜘蛛网模型。

例 1　蜘蛛网模型

以年产量表示农产品供给量和农产品的需求量，其中假设某年的供给量S_t是前一年价格P_{t-1}的函数，则供给函数的形式为$S_t = S(P_{t-1})$。而某年对农产品的需求量D_t是该年农产品价格P_t的函数，因此需求函数的形式为$D_t = D(P_t)$。这些假设会导致有关市场结构作用的一些有趣结论。

可用图3.1a来说明关于同类农产品的需求曲线D和供给曲线S。为简单起见，假设D和S都是直线（实际上不需要直线这个假定，也会导致类似的结论）。

根据供给和需求的规律，某一产品的价格决定于平衡点P（即供给曲线S和需求曲线D相交之点），它相当于价格OM，这时供给和需求是相等的。如果某一年玉米的价格处在平衡水平，但由于下一年猪肉价格上涨，使得养猪增加了，结果对玉米饲料的需求也会增加，从而引起需求曲线向右移动，并打乱了已有的市场平衡。需求曲线移到D′的位置时，按已知价格OM的需求量就大于供给量，因此价格上涨至P_1——暂时的平衡点。当价格是OM_1时，农民都准备要多种玉米，并决定扩大耕作面积。但是直到一年后新产品被投入市场之

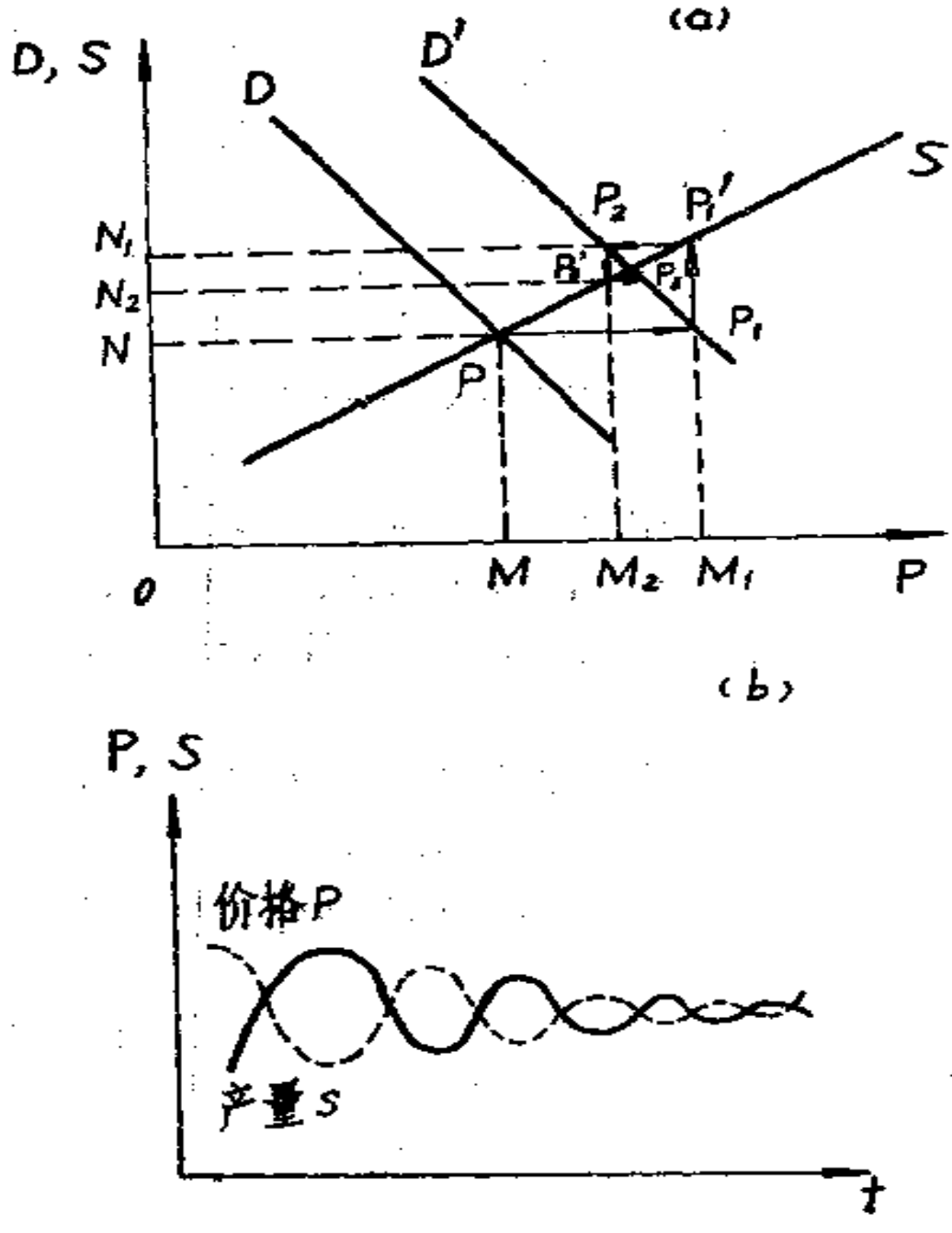


图3.1　蛛网模型：减幅性摆动

前，产量增长是决不会出现的。因此，次一个暂时的平衡点将是P'_1，这时供给超过需求（即每个农民都对价格上涨作出反应），从而价格下跌，由OM_1降至OM_2，暂时的平衡点又将为P_2。但OM_2对农民来说是太低了，结果供给减小到ON_2的水平，以适应OM_2这个价格水平。如此下去，暂时的平衡点就由P移至P_1，再移到$P'_1$$P_2$，$P'_2$，$P_3$…等等，见图3.1a。

因此，由于需求曲线从位置D移到D′的结果，就产生一种产量和价格成相反方向的振荡运动，即产量增长引起价格下跌，或产量下降导致价格上升。

在这种情况下，产量和价格波动的幅度将逐年缩小，如图3.1b，直至建立一个新的平衡价格（即从D′与S的交点向OP引垂线所确定的垂足点），如图3.1a。

但是，市场结构的作用也可能产生极不相同的结果。如果D和S倾斜得如图3.2a那样，需求曲线由D移至D′，就引起产量和价格以较大的幅度波动。由于这种波动的结果，就不会达到新的市场平衡，见图3.2b。

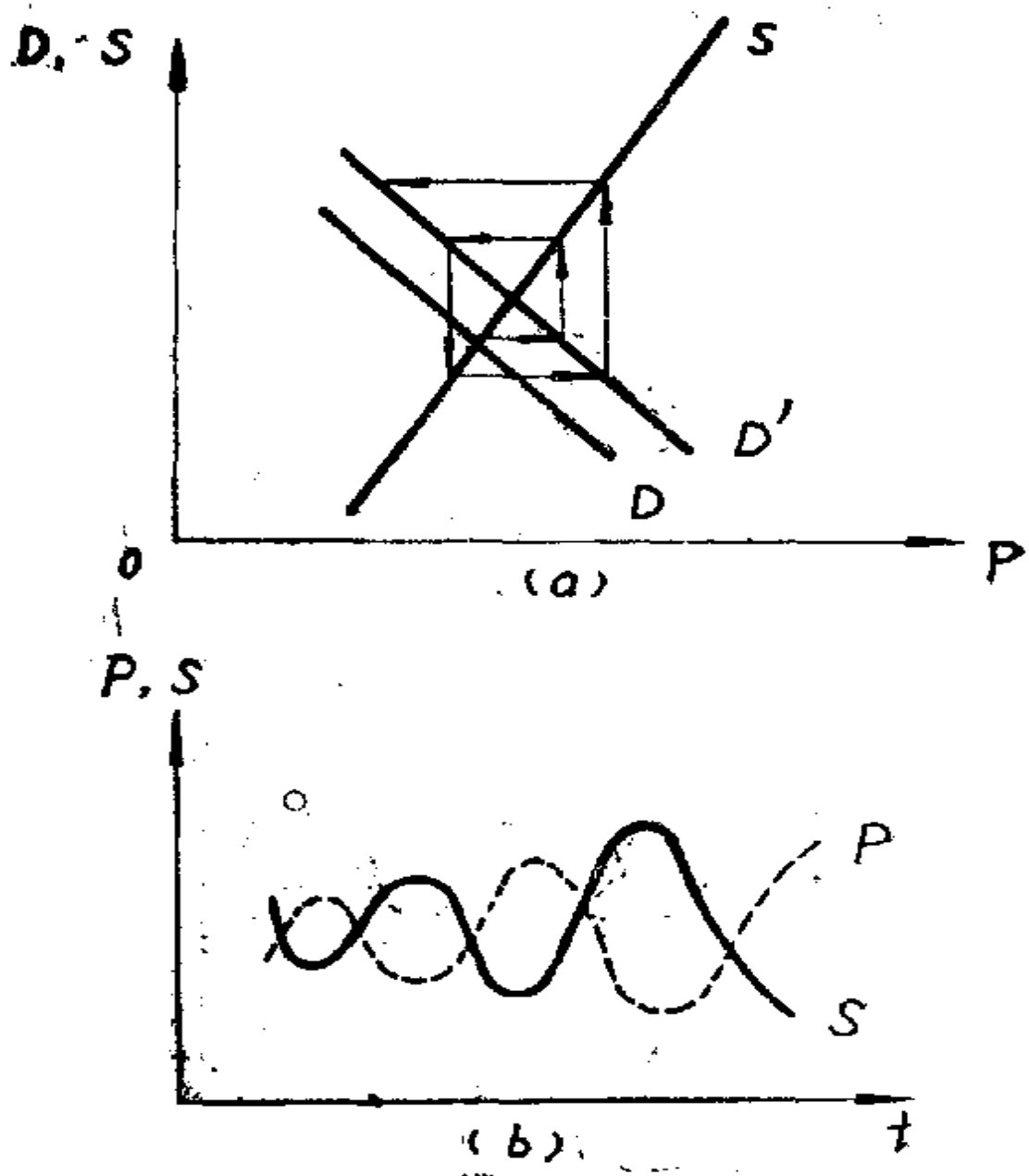


图3.2 蛛网模型：爆发性摆动

最后，在特殊的场合下，供给曲线S和需求曲线D的位置可以是这样的，即市场平衡的失调将引起价格和产量以固定幅度进行周期性波动，见图3.3。

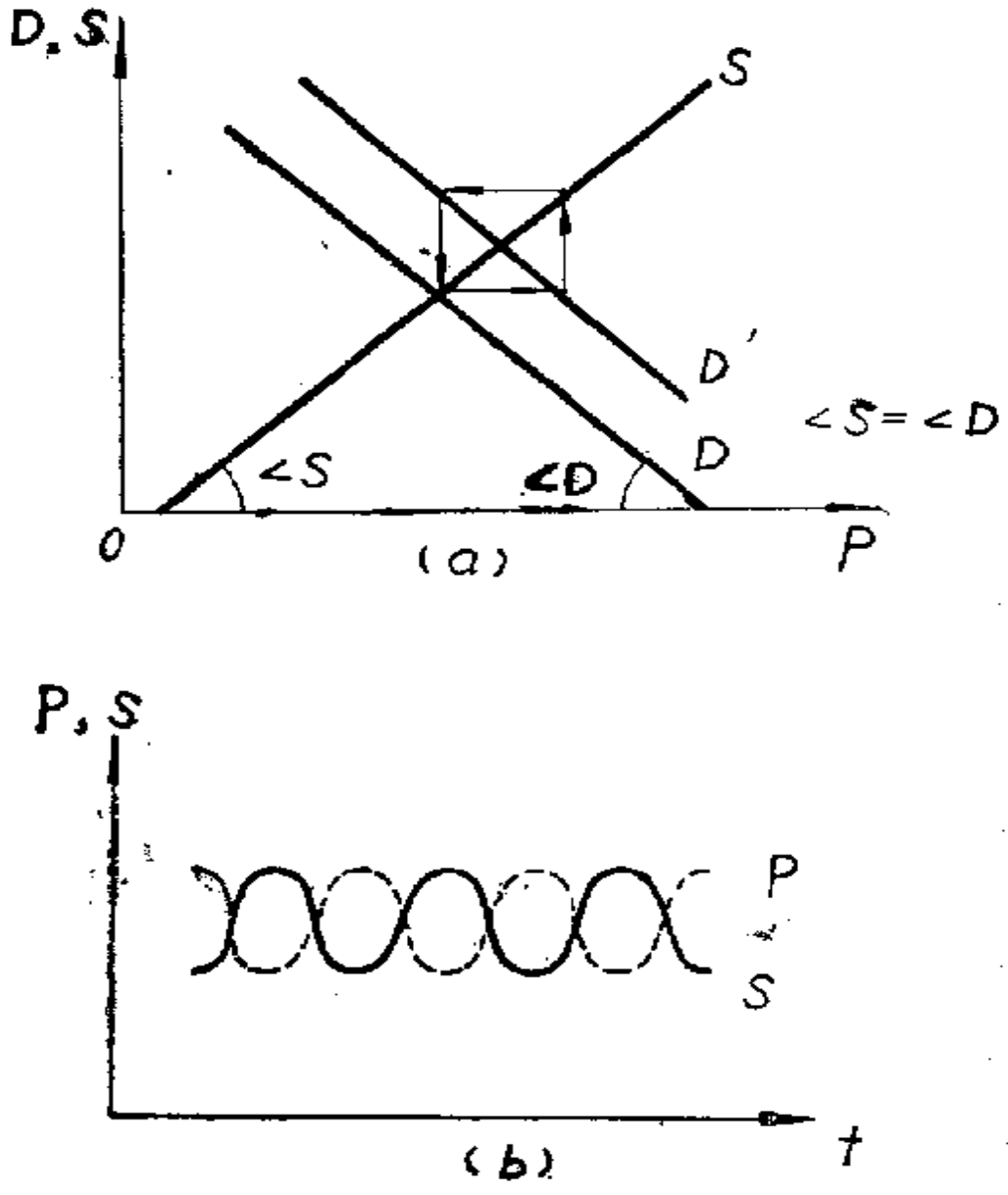


图3.3 蛛网模型：恒定性摆动

因此，市场平衡一旦失调（这种失调是由外部扰动——需求的变化引起的），就会导致价格和产量的波动。综上所述，可能有三种情况：

1.减幅性波动，它导致一个新的平衡（图3.1）；

2.恒定性波动，即振幅固定的周期性波动（见图3.3）；

3.爆发性波动（见图3.2）。

从几何图形上易见，出现哪种情况取决于D和S与横轴的夹角∠S和∠D（见图3.3a）的度数大小之比。∠S<∠D时，出现第一种情况；∠S=∠D，出现第二种情况；∠S>∠D，出现第三种情况。

这三种情况分别是下面要讲到的渐近稳定性（对应于1）、稳定性(对应于2)和不稳定性（对应于3）的直观模型。需联系下面的内容加以体会。

显然，第一种情况是我们所需要的，因为它能使供给和需求逐渐一致起来。但这里仍然有一个问题需要讨论：能否通过一定的外部调节（如反馈）使二者更快地一致起来，即向平衡点收敛的速度更快些。

第二种情况有些差强人意。因为这时供求的不平衡虽不会因时间推移而加大，但也不会随时间推移而缩小。这样，将造成资源过多的浪费。因此，问题在于能否通过外部调节和控制，使其变为第一种情况。

第三种情况当然是我们最不希望出现的。因为它使供求不平衡日益加大，供求矛盾日益尖锐（例如积压日益增多）。

以上三种情况都涉及到动态经济系统的平衡与稳定。以下我们介绍有关平衡和稳定的概念。

3_2 平衡与稳定的直观背景及定义

在平衡与稳定所表示的各种意义中，都含有“不变量”这一基本概念：尽管系统经过许多变化，但终归有些地方是不变的。因而变化虽不绝，但仍可对变化过程作出某些永远成立的不变的断语。通过对这种整体不变性——稳定性的把握，我们就可以舍略很多细节，而正确地预见经济系统的未来发展趋势。这正是稳定性概念的重要意义。

1.平衡状态

下面看一个例子。图3.4中的小球恰好在某一时刻立住不动，此后随着时间的推移，该状态保持不变，我们称这个状态为该系统的平衡状态。实际上，系统的运动或变化就是系统从这一状态向另一

状态的转移。如果有某个状态，系统一旦达到之后就一直保持在这个状态上，那末这个状态就是平衡状态。反之，系统不能保持在其上的那些状态，就是不平衡状态。

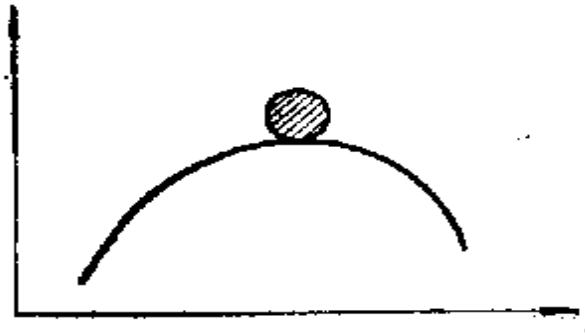


图3.4 平衡态示意

借助这个例子，我们给出平衡的严格定义。

定义 1 设离散时间系统为：

$$z(k+1)=f[z(k)] \qquad (3.2\text{—}1)$$

其中，$z(k)\in R^n$；$f(\cdot)$为n维向量值函数。

如果$\hat{z}\in R^n$（为n维欧氏空间，下同）满足如下的方程，则称向量$\hat{z}$为系统(3.2—1)的一个平衡状态。

$$\hat{z}=f(\hat{z}) \qquad (3.2\text{—}2)$$

从代数的角度看，上述定义中所说的平衡状态无非是对应的代数方程的一个常数解（即$\hat{z}$是常向量）。也就是说，这个解是不随时间而变的（即系统一旦达到了这个状态后，就不再随时间推移而离开这个状态）。

当系统（3.2—1）为非线性系统时，可能有一

个或一个以上的平衡状态，也可能没有平衡状态。但是，对于线性系统有如下定理：

定理 1 对于线性系统$z(k+1)=Az(k)$有如下结果：

1. $z=0$为一平衡状态；

2.若矩阵$(I-A)$可逆，则$z=0$为唯一的平衡状态；

3.若矩阵$I-A$不可逆，则满足方程$(I-A)z=0$的任何常向量都是其平衡状态。

证明从略。

2.稳定性的直观背景及其定义

现在再看一个例子，并和上面的例子进行对比。

在图3.5中左边的情况就是前面已说过的例

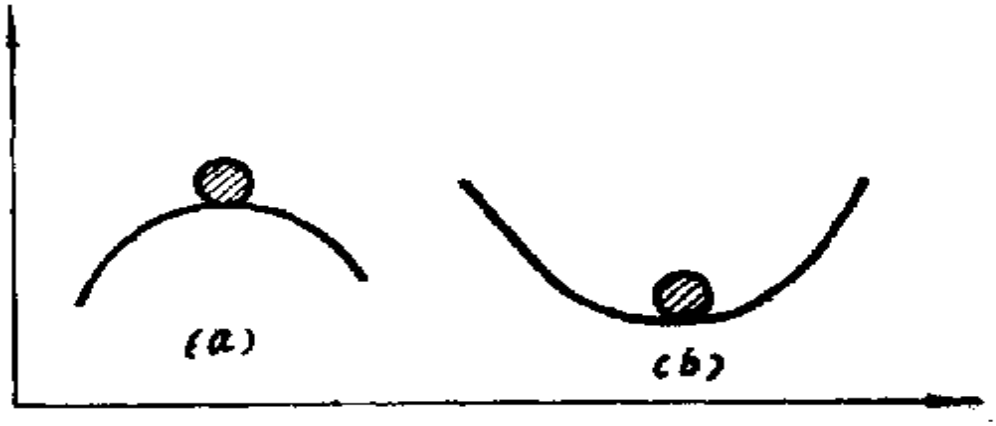


图3.5 两种平衡态：稳定与不稳定

子。如果我们用手轻轻碰一下小球，小球就会滚落，而且再也不会回到这个平衡状态，不管时间有多么长。

右边的情况是这样的：当小球已处在底部时，显然也是一个平衡状态。当我们用手推一下小球，小球会晃动起来，但随着时间的推移，小球终归会回到这个平衡状态。这时的情况就与左边的情形很不相同。我们称左边的平衡状态是不稳定的，简称不稳定；称右边的平衡状态是稳定的，简称稳定。这两种情况的相同之处在于它们都是平衡的。不同之处在于：当系统处于平衡状态时，有一个外界的扰动发生，系统偏离了平衡状态，随着时间的推移，前者不能恢复到平衡状态，所以是不稳定的，后者可以恢复到平衡状态，所以是稳定的。

系统的平衡状态反映了系统内部的一种性质，这种性质不涉及系统与环境扰动的关系。但稳定性却反映了系统内部平衡状态与外界环境变化的关系，是系统的一种更深刻的内在性质。几乎所有的经济系统，无论是哪种类型，也无论处于什么层次，都有稳定性问题。以市场机制作用下的工厂为例，在萧条时期其投入产出的平衡状态是不稳的，随时可能倒闭。在景气时期，它的稳定性就大大增

强了。而在技术革命突飞猛进的时期，它的稳定性又发生变化，转产、转业的可能性大增。

现在我们把蛛网模型的三种情况提练成数学形式，以说明稳定性理论的典型问题。稳定性理论提出的典型问题是这样的：

假若系统的初始状态z(0)偏离了系统的某个平衡状态z，当时间标号k不断增大时，问状态z(k)：(1)是否趋近于平衡状态z（渐近稳定）？（2）是否停留在z的附近，即是否有界（稳定性）？(3)是否离z越来越远，即发散出去（不稳定性）？这三种情况分别见图3.6。

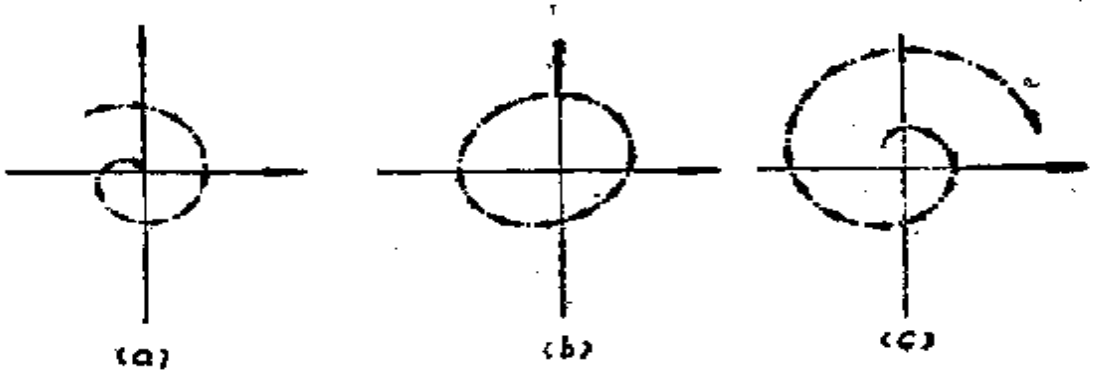


图3.6　渐近稳定，稳定与不稳定

为了给出经济系统稳定性的严格定义，下面介绍向量和矩阵的“范数”的定义。

定义2　设$x \in R^n$，定义$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，它满足下列条件：

1. $\|x\| \geqslant 0$，且 $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$；

2. 对任何实数 α 有 $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$；

3. 对 $\forall x, y \in R^n$，有

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \text{（三角不等式）}$$

这时，我们称 $\|x\|$ 是向量 x 的范数（范数 $\|x\|$ 是 n 维向量 x 的各个分量 x_i 的数值函数）。

对于上述条件的验证留给读者。

易见，向量的范数是实数绝对值的推广，也是三维空间两点间距离的推广。

定义 3 设 A 是 $n \times m$ 实矩阵，定义 $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$，它满足下列条件：

1. $\|A\| \geqslant 0$，且 $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0_{n \times m}$

2. 对任何实数 β，有 $\|\beta A\| = |\beta| \cdot \|A\|$

3. $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$（三角不等式）

这时，称 $\|A\|$ 是 $n \times m$ 矩阵 A 的范数。

对于上述条件的验证也留给读者。

易见，矩阵的范数是向量范数的推广。

有了范数的定义，我们就可给出系统稳定性的严格定义。

设 z_e 为系统的平衡状态，这是系统的状态空间中的某一个点。对于孤立的平衡点，总可通过座标

轴的移动将Ze变为新座标系的原点，因此不失一般性，可令系统的平衡状态$z_e = 0$，以此来考察系统的稳定性。

定义4 设系统$z(k+1) = f[z(k)]$的平衡点$z_e = 0$，对于任意给定的正实数$\varepsilon > 0$，若总能找到实数$\delta > 0$，使得如果系统的初态$\|z(0) - z_e\| = \|z(0)\| < \delta$，当$k = 0, 1, \cdots$时，有$\|z(k)\| \leqslant \varepsilon$，则称平衡点$z_e = 0$是稳定的。如图3.7。

这个定义的涵义是说：如果对于平衡状态($z_e = 0$)的任何给定的允许的偏离区域（域ε），总可以指出这样一个区域δ（它包含平衡状态z_e），使得从区域δ中出发的任何运动轨迹决不会到达或越出区域ε的边界，那末这一平衡状态是稳定的。

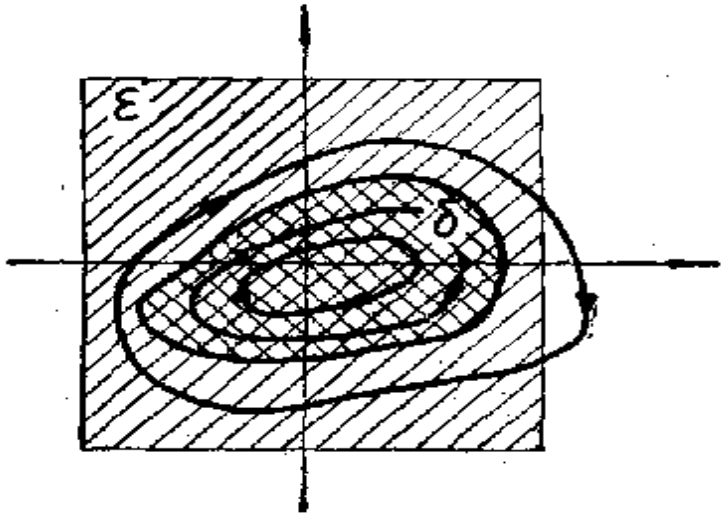


图3.7 稳定性

定义5 如平衡点$z_e=0$是稳定的，且初始状态$\|z(0)\|<\delta$，当$k\to+\infty$时，有$\|z(k)\|\to 0$，则称平衡点$z_e=0$是渐近稳定的。如图3.8a。

将这个定义与定义4相比，可见渐见稳定不仅

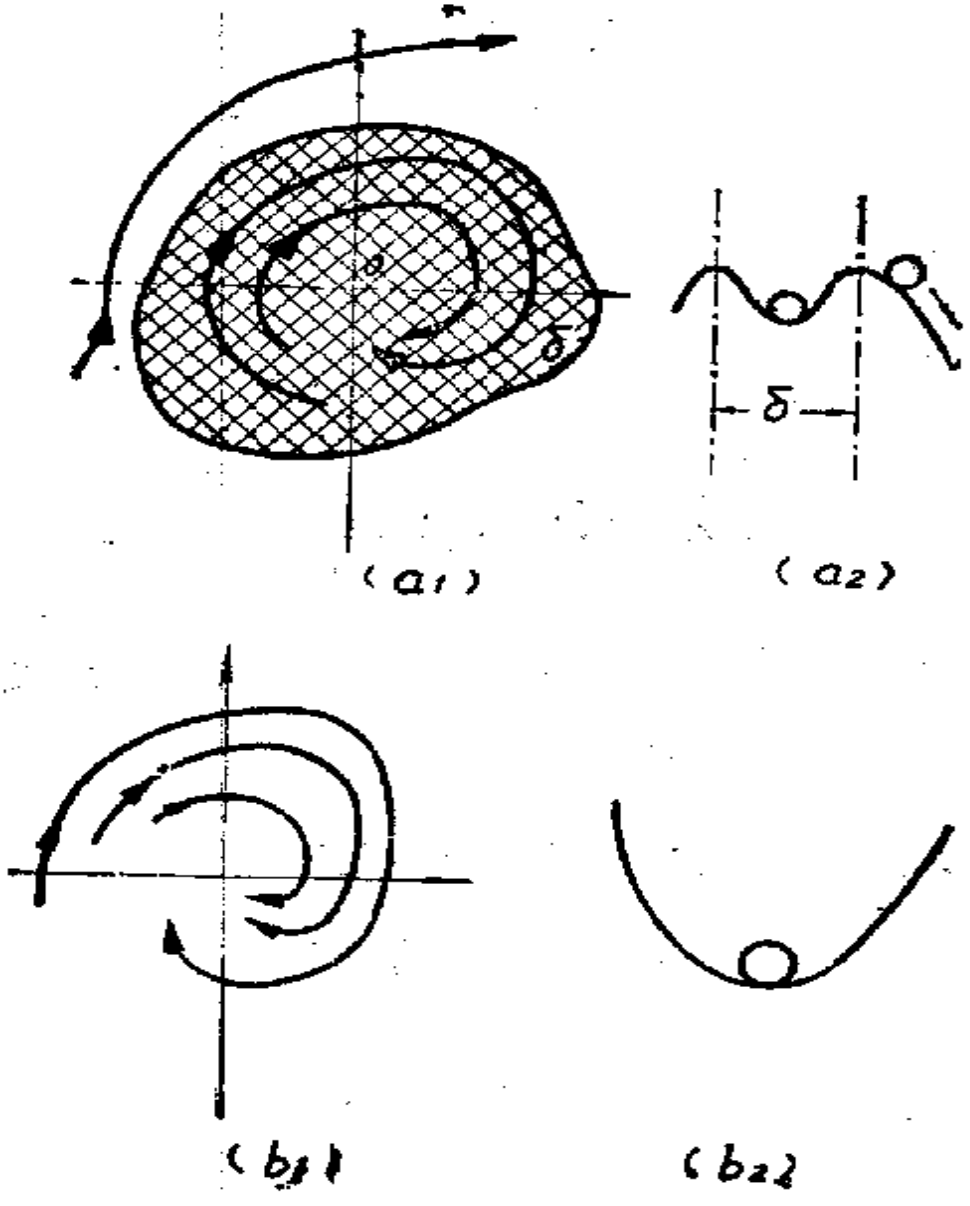


图3.8 稳定性的几何表示及物理直观模型

要求稳定，而且要求在某个范围内（区域δ内）的运动轨迹随着时间的推移，最终要趋向于平衡点。

定义 6 如平衡点$Z_e = 0$是稳定的，且不论初始值$z(0)$怎样选择，当$k \to +\infty$时，有$\|z(k)\| \to 0$，则称平衡点为大范围渐近稳定。如图3.8b。

这个定义不再要求运动轨迹$z(k)$处在某个范围（区域δ）了，这个范围可以是任意的。

图3.8给出空间为二维时的各种稳定性的几何表示及物理直观模型。

3_3 线性离散系统的稳定性

有了系统稳定的严格定义，我们就可以讨论如何判别稳定性的问题。

1.齐次线性时不变系统的稳定性

关于齐次线性时不变系统的稳定性，有以下的判别定理。

定理 2 齐次线性时不变系统

$$z(k+1) = Az(k)$$

关于座标原点(即平衡状态 0)为大范围渐近稳

定，即，

$$\lim_{k\to+\infty} z(k) = 0 \qquad (3.3—1)$$

它的充要条件是：矩阵的所有特征值λ_i（$i=1, \cdots, n$）的绝对值皆小于1 。

这里只讲证明的思路。因为$z(k)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i^k v_i$，所以要使$\lim_{k\to\infty}Z(k)=0$成立，就必须有$|\lambda_i|<1$（$i=1, \cdots, n$），这样随着k增大，$\lambda_i^k$就接近于0。

应该提一句，线性时不变系统的渐近稳定性与大范围渐近稳定性等价。所以，这个定理也可看为渐近稳定的充要条件。这从本章前面的蜘蛛网模型的第一种情况（图3.1）可直观地看出，无论初始点在哪儿，系统总会收敛到D′和S的交点上。

对于线性时不变系统的稳定性，还有如下的定义和判别定理。

定义7 对于齐次线性时不变系统

$$z(k+1)=Az(k) \qquad (3.3—2)$$

1.若$\lim_{k\to\infty}\|z(k)\|<\infty$，则称该系统是稳定的。（这与定义4是等价的，使用起来更方便）。

2.若$\lim_{k\to\infty}\|z(k)\|\to\infty$，则称该系统是不稳定的。

定理3 设上述系统中的矩阵A的特征值λ_1，…，λ_n各不相同，则：

1.系统(3.3—2)稳定的充要条件是：

$$|\lambda_i| \leqslant 1, \qquad i = 1, \cdots, n$$

2.若有任一特征值的绝对值大于1，即$|\lambda_i| > 1$，对某一i而言，则系统(3.3—2)是不稳定的。

2.非齐次线性时不变系统的稳定性

利用齐次线性时不变系统关于原点的稳定性定理，可以解决非齐次线性时不变系统的稳定性问题。下面我们来考虑这个问题。

考虑非齐次线性时不变系统

$$z(k+1) = Az(k) + Bx(k) \qquad (3.3—3)$$

假设政策输入序列$\{x(0), x(1), \cdots, x(k), \cdots\}$为已知。如果系统(3.3—3)从初始状态$z(0) = \hat{z}$时开始，其后的状态序列为$\{\hat{z}(1), \hat{z}(2), \cdots, \hat{z}(k), \cdots\}$；而从初始状态为$Z^*(0) = \tilde{z}$开始，其后的状态序列为$\{\tilde{z}(1)\cdots, \tilde{z}(k), \cdots\}$。这里假定两种情况下的政策输入序列都是$\{x(0), x(1), \cdots, x(k), \cdots\}$，这就是说，在同样政策输入序列的情况下，由于初始状态不同，同一系统的状态序列可以不一样。

现在要问，如果$\hat{Z} \neq \tilde{Z}$，那末，在什么条件下两组状态序列会随时间推移而彼此接近？即在什么条件下有$\lim_{k\to\infty}[\hat{z}(k)-\tilde{z}(k)]=0$？

为此，写出对应于$\hat{z}$和$\tilde{z}$的状态方程：

$$\hat{z}(k+1)=A\hat{z}(k)+Bx(k)$$

$$\hat{z}(k+1)=A\tilde{z}(k)+Bx(k)$$

两式相减得：

$$\hat{z}(k+1)-\tilde{z}(k+1)=A[\hat{z}(k)-\tilde{z}(k)] \qquad (3.3-4)$$

(3.3—4)是关于差向量$[\hat{z}(k)-\tilde{z}(k)]$的齐次线性时不变系统，因此，由节3.3中关于齐次线性时不变系统的定理2可知，当矩阵A的特征值的绝对值全都小于1时，有$\lim_{k\to\infty}[\hat{z}(k)-\tilde{z}(k)]=0$，即矩阵A的特征值$|\lambda_i|<1(i=1,\cdots,n)$时，两个解彼此接近，而该特征值中若有一个$|\lambda_i|>1$，两个解就会相互分离得越来越远。

特别是，当$x(0)=x(1)=\cdots=x(k)=x_0$，即设政策输入序列为常向量$x_0$（它不随时间而变），而$z_e$是(3.3—3)对应于$x_0$的平衡状态，即有$z_e=Az_e+Bx_0$。

再设$z(k)$是$z(k+1)=Az(k)+Bx_0$和$z(0)=z_0$（初始状态）的解，且$z(k)-z_e$满足方程$z(k+1)-z_e=A[z(k)-z_e]$。这是关于差向量$(z(k)-z_e)$的齐次线性时不变系统，当矩阵A的特征值的绝对值都小于1时，有$\lim_{k\to\infty}[z(k)-z_e]=0$ $\Longleftrightarrow\lim_{k\to\infty}z(k)=z_e$，即非齐次线性时不变系统(3.3—3)关于平衡状态ze是渐近稳定的。

我们掌握了上述关于稳定性的定义和判别定理后，就可以对各种经济模型的稳定性及其条件做出判断。下面来看几个例子。

例 2 动态市场价格模型

$$\begin{cases} x_k = ap_k + \alpha \\ y_k = bp_{k-1} + \beta \end{cases} \qquad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

其中：x_k是某产品在k时的需求量，y_k是这种产品在k时的供给量，p_k是该产品在k时的市场价格，a、b、α、β均为已知常数。

当供求平衡时，$x_k=y_k$，于是得到：

$$p_k=\frac{b}{a}p_{k-1}+\frac{\beta-\alpha}{a} \qquad k=1,\ 2,\ \cdots$$

这是一阶的状态方程，其中$\frac{b}{a}$相当于上述的矩阵A。

该模型的平衡状态（即平衡价格）是：

$$\hat{P}=\frac{b}{a}\hat{P}+\frac{\beta-\alpha}{a} \quad 或 \quad \hat{P}=\frac{\beta-\alpha}{a-b}$$

那末，根据上述定理，易见P_t关于平衡价格$\hat{P}$稳定的条件是$\left|\frac{b}{a}\right|<1$（即$|b|<|a|$）。

由于a、b分别是需求曲线和供给曲线的斜率，所以我们就严格地证明了在本章开始时所举蛛网模型的稳定条件。

例3 判定商业循环模型的稳定性

这个模型是在2.1中引进的，其中的A为：

$$\begin{pmatrix}\alpha(1+\beta) & 1\\ -\alpha\beta & 0\end{pmatrix}$$

现假设$\alpha=0.5$，$\beta=0.02$，则有：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\alpha(1+\beta) & -1\\ \alpha\beta & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2-0.51\lambda+0.01$$

由一元二次方程的求根公式不难得出：$|\lambda_1|<1$，$|\lambda_2|<1$。因此，商业循环模型是渐近稳定的。

3，线性时变系统的稳定性

以上介绍的稳定性判别定理是对线性时不变经

济系统而言的。虽然实际的经济系统往往要比线性时不变系统复杂得多，但这里所给出的基本思路是具有普遍意义的。对于时变系统或非线性系统的稳定性问题，可以按这条思路去处理，只不过在“技术”上更复杂罢了。对于非线性系统通常采用的办法是“线性化”处理，这在下一节介绍。现在先简单介绍线性时变系统的稳定性判别。

对于线性时变系统的渐近稳定性，我们可以给出某些充分条件。一个典型的充分条件如下。

定理 4 系统的状态方程为：

$$z_{t+1} = (\Phi + \psi_t) z_t$$

其中：Φ、ψ_t都是矩阵，如果$\|\Phi\| < 1$，而且$\sum_t \|\psi_t\| < \infty$；则当$t \to \infty$，有$z_t \to 0$。

3_4 非线性经济系统的静态线性化和平衡的局部稳定性

迄今为止，我们所讨论的都是线性系统，而经济系统一般都是非线性的。例如，$y_t = \gamma k_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$是某个企业的生产函数，$k_t$是资本量，$L_t$是劳动力数量，$y_t$是产品数量。由于$0 < \alpha < 1$，变量的

幂次已不是一次，所以这是一个非线性的经济模型。

一般地说，建立非线性系统全局稳定性的结果是不可能的，因此在本节里，我们将只限于解决局部稳定性的问题。

解决这一问题的方法叫做静态线性化方法，其基本思路是：在一个可能的平衡状态附近将非线性系统线性化。在自然科学的许多分支领域中碰到实际的复杂问题，往往就要用这种线性化方法。在处理复杂的社会经济问题时，更用得到这种方法。线性化方法实质上是利用泰勒级数展开*，并且只保留线性项，从而获得一级近似的结果。这样便得到了一个线性系统，用它来研究非线性系统在平衡点的邻域内的特征。通过研究这一线性系统的稳定性，就可以导出非线性系统

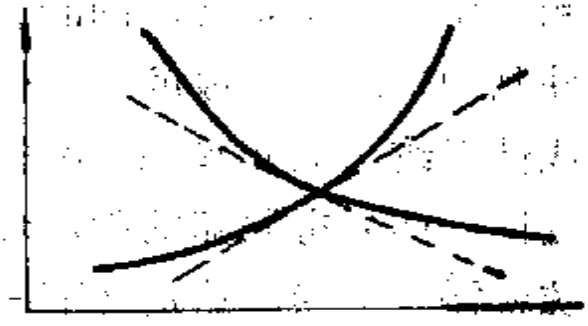


图3.9 线性化方法

* 若函数$f(x)$在$x=x_0$的某一邻域内具有各阶导数$f'(x)$，$f''(x)$，…，$f^{(n)}(x)$，…，且有$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}=0$（$x^*$是$x_0$邻域内的某个值），则$f(x)$可以展开为它的泰勒级数：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$

的局部稳定性的情况。

图 3.9 就是这种方法的形象的几何说明。在平衡点周围，我们可以直（线性）代曲（非线性）。

1.经济系统的平衡偶及平衡状态的局部稳定性

要严格地描述事物的某一性质，一般都要经过两个步骤：首先，要对这个性质下定义；其次，要按这个定义来判别这种性质是否存在，以及在什么条件下存在，这就是给出判别定理。在前两节中我们已经用严格的数学形式对一般经济系统的平衡性和稳定性下了定义，同时也给出了线性系统的稳定性判别定理。一般的稳定性定义，固然也适用于非线性系统，但非线性系统往往不具有这种全局的稳定性，而只有局部的稳定性。因此，讨论非线性系统就需要对局部稳定性下一个严格定义，然后再给出局部稳定性的判别定理。为了便于讨论局部稳定性问题，我们首先引入平衡偶这一新概念。

考虑由下述向量差分方程所描述的经济系统：

$$z(k+1)=f[z(k),\ x(k)] \qquad (3.4-1)$$

写成展开形式，其中$z_i(k+1)$，$i=1,\cdots,n$，为标量有：

$$z_1(k+1)=f_1[z(k),\ x(k)]$$

$$z_2(k+1) = f_2[z(k),\ x(k)]$$

……

$$z_n(k+1) = f_n[z(k),\ x(k)]$$

假设在此系统上施加一常数政策控制序列（即在任何时刻k，政策都保持不变），即：

$$x_{(0)} = x_{(1)} = \cdots = x(k) = \cdots = x^0$$

对所有k＝0，1，2…　（3．4—2）

再假设系统(3．4—1)在这个常数输入序列的作用下达到一稳态，也就是说：

$$\lim_{k\to\infty} z(k) = z^0,\ \text{当}\ x(k) = x^0\ \text{时}$$

（对所有的k）　（3．4—3）

假设f(•，•)为一连续函数，则上述假设包含

$$z^0 = f(z^0,\ x^0)^*\qquad (3.4-4)$$

这个等式确定了所谓平衡的输入—状态偶的准确涵义。现把这一概念正式叙述为如下的定义。

定义3　（输入—状态平衡偶）考虑经济系统(3．4—1)，假定：

$$z(k) \in R^n,\qquad x(k) \in R^m\qquad (3.4-5)$$

---

* 这是由于$z^0 = \lim_{k\to\infty} z(k+1)$

$= \lim_{k\to\infty} f[z(k),\ x_0]$　（由3．3—1）

$= f[\lim_{k\to\infty} z(k),\ x_0]$　（由连续性）

$= f(z^0,\ x^0)$　（由3．3．3）

如下述等式

$$z^0 = f(z^0,\ x^0) \qquad (3.4—6)$$

成立，则称常数向量对$(z^0,\ x^0)$组成一平衡偶。

注意：一般地说，平衡状态 z^0 依赖于 x^0。也就是说，对于常量输入序列x^0取不同值（如取为x'），系统可能到达不同的平衡状态（如平衡偶可能为 z'，x'）。此外，若将同样的输入序列 x^0 施加到系统上，系统是否达到同样的平衡状态z^0，一般还要看系统的初始状态 $z(0)$而定。在某些初始状态下，系统能够达到Z^0，而在另一些初始状态下，它可能达到和 z^0 不同的平衡状态，或者发散。这意味着向量方程：

$$z = f(z,\ x^0) \quad x^0 = \text{固定值} \qquad (3.4—7)$$

这可能有不止一个解。假设以z_1^0，z_2^0，$\cdots z_N^0$（皆为常向量）表示方程(3.4—7)的所有可能解，即

$$\begin{aligned} z_1^0 &= f(z_1^0,\ x^0) \\ z_2^0 &= f(z_2^0,\ x^0) \qquad (3.4—8) \\ &\cdots\cdots \\ z_N^0 &= f(z_N^0,\ x^0) \end{aligned}$$

按上述定义，偶$(z_1^0,\ x^0)$，$\cdots$，$(z_N^0,\ x^0)$都组成输入—状态平衡偶。实际上究竟达到其中的哪一个，则与系统的初始状态有着密切的依赖关系。

现假设(z^0, x^0)组成一平衡偶，研究系统：

$$z(k+1)=f[z(k), x^0] \quad z(0)=z^0 \tag{3.4—9}$$

换言之，初态$z(0)$恰好就是平衡状态z^0，于是：

$$z(1)=f[z(0), x^0] \Longrightarrow z(1)=z^0$$
$$z(2)=f[z(1), x^0] \Longrightarrow z(2)=z^0 \tag{3.4—10}$$

这意味着对于所有的k，$z(k)=z^0$，它表明若系统是由一平衡状态开始，则系统就将始终停留在这一平衡状态上。

在我们考虑经济系统

$$z(k+1)=f[z(k), x^0]$$
$$z^0+z\delta(0)=z(0) \tag{3.4—11}$$

的特征时，就会出现平衡状态的局部稳定性的概念，其中$\delta z(0)$是非常小的任意向量。在这一情况下，系统的初态非常接近于平衡状态〔也就是将系统从平衡状态z^0稍稍移开一点，作为系统的初态$z(0)$〕，那末$z(k)$的特征将会如何呢？它或者恢复到平衡状态z^0，或者不是。要是它趋近于平衡状态z^0，就说z^0是一个局部严格稳定的平衡态，反之，z^0就不是一个局部严格稳定的平衡态。由此有下述定义。

定义 9 考虑系统$z(k+1)=f[z(k), x(k)]$，令(z^0, x^0)表示一平衡偶，即$z^0=f(z^0, x^0)$，若该系统

$$z(k+1)=f[z(k), x^0],$$
$$z(0)=z^0+\delta z(0) \qquad (3.4—12)$$

对所有充分小的$\delta z(0)$，即$\|\delta z(0)\|<\varepsilon$，都有如下性质，则称$(z^0, x^0)$为一局部严格稳定平衡偶。

$$\lim_{k\to\infty} z(k)=z^0 \qquad (3.4—13)$$

对于线性系统而言，我们已看到，可通过检验特征值，以定量的方式来分析其稳定性。那末，对于非线性系统平衡偶的局部稳定性，是否有类似方法呢？下面就来谈这个问题。

2.线性化方法

讨论一个非线性系统平衡偶的稳定性质，其基本特点就是要找出一个线性系统，其特征近似于非线性系统在平衡偶附近的特性。这样，我们就可以利用检验线性系统稳定性的方法，来研究非线性系统的稳定特性。可是，我们必须付出代价，即必须牺牲没有限制的一般性讨论，而假定所考虑的非线性系统具有某些附加的性质。

把非线性系统转到线性系统，所采用的基本方

法就是进行泰勒级数展开，并且仅取其线性项。下面不加证明地给出一个定理。

定理 5 考虑非线性系统

$$z(k+1)=f[z(k),\ X(k)] \qquad (3.4—14)$$

假设$(z^0,\ X^0)$组成一平衡偶，即：

$$z^0=f(z^0,\ x^0) \qquad (3.4—15)$$

假设$f(\cdot,\ \cdot)$对于$z(k)$至少是连续两次可微，考虑矩阵：

$$A_0\triangleq\left.\frac{\partial f[z(k),\ x^0]}{\partial z(k)}\right|z(k)=z^0* \qquad (3.4—16)$$

并设$\lambda_1^0,\lambda_2^0,\cdots,\lambda_n^0$为其特征值，且互不相同。若

$$|\lambda_i^0|<1,\ i=1,\cdots,n \qquad (3.4—17)$$

则平衡偶$(z^0,\ x^0)$为局部严格稳定。

这个定理指出，非线性系统在具有一定性质，即满足式(3.4—16)的条件下，可以用线性系统作

---

* $\frac{\partial f(z(k),\ x^0)}{\partial z(k)}$为$f(z(k),\ x^0)$对于$z(k)$的各个一阶偏导数所组成的矩阵，称为雅可比矩阵。要注意雅可比矩阵的元素依赖于$z(k)$和x^0。$\left.\frac{\partial f(z(k),\ x^0)}{\partial z(k)}\right|z(k)=z^0$表示雅可比矩阵的元素都是在$Z(k)=z^0$处算出的。若假设$z^0$和$x^0$是已知的，就可计算出这个矩阵。

为它的可靠的一级近似。这时，近似的线性系统的性质能给出非线性系统的概貌，因此线性化方法可以使我们通过研究线性系统的稳定性来了解非线性系统的稳定性。

3_5 经济系统线性化的例子

现在考虑由Arrow和 kurz 于1970 年提出的两部门增长模型。我们对它作了适当修改，以适应我国的情况。

这个模型以季度为时间单位。令k_t^1和k_t^2分别为非政府部门和政府部门在第 t 个季度开始时的固定资产存量。这里非政府部门是由那些主要受市场调节的企业所组成的，政府部门则由那些主要受计划调节的企业组成。两个部门的固定资产的折旧率都假定为δ。非政府部门的新形成的投资数量为 Sy_t，其中 S 是非政府部门的投资率（即非政府部门的投资量在整个经济系统的总产值中所占的比重）；y_t是整个经济系统的总产值，由下式给定：

$$y_t = F(k_t^1, k_t^2, L_t)$$

这个公式的涵义是在第 t 季度时的总产值由

k_t^1、k_t^2和L_t决定的。

k_t^1、k_t^2和L_t由下列式子给定：

$$k_{t+1}^1 = (1-\delta)k_t^1 + Sy_t$$

$$k_{t+1}^2 = (1-\delta)k_t^2 + G_t$$

$$L_t = L_0 e^{nt}$$

其中：G_t为第t季度的政府支出，L_t为第t季度的劳动力总量，L_0为初始时刻的劳动力总量；n为常数，e是自然对数。

现将上述变量换成以每个劳动力为单位，并以小写字母表示，则有：

$$k_t^i = k_t^i/L_t = k_t^i/L_0 e^{nt}, \quad i = 1, 2$$

$$y_t = y_t/L_0 e^{nt}$$

$$g_t = G_t/Le_0^{nt}$$

比如，k_t^1就是每个劳动力平均占有非政府部门固定资产的数量。

现在假设生产函数是 Cobb—Douglas 型的，则有：

$$y_t = \gamma(k_t^1 + k_t^2)^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

其中，γ、α是常数，$0 < \alpha < 1$。

这样便得到：

$$y_t = \gamma(k_t^1 + k_t^2)^{\alpha}。 \qquad (3.5—1)$$

如果选择$\begin{pmatrix} k_t^1 \\ k_t^2 \end{pmatrix}$为这个模型的状态向量$k_t$，那末人均固定资产占有量的增长由下式确定：

$$k_{t+1} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} k_t + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-n} \end{pmatrix} g_t + \begin{pmatrix} \hat{S} y_t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.5—2}$$

其中：$\beta = (1-\delta)e^{-n}$，$\hat{S} = e^{-n}S$，y_t是人均固定资产占有量的非线性函数（这由3.5—1中的指数$\alpha \neq 1$即可看出）。现在让我们考虑在均衡（或平衡）状态向量k_*附近导出y_t的线性方程。政策控制变量是g_t，假定它等于常数g_*（即政府开支g_t在每个季度里都是固定的），于是我们便有了一个输入—状态平衡偶（k_*，g_*），也就可以利用上述线性化方法了。

因为人均固定资产的均衡状态为k_*^1和k_*^2，所以由(3.5—2)，它们必须满足下式：

$$k_*^1 = \beta k_*^1 + \hat{S} r (k_*^1 + k_*^2)^{\alpha} \tag{3.5—3}$$

$$k_*^2 = \beta k_*^2 + e^{-n} g_* \tag{3.5—4}$$

其中：$\hat{S}$和g_*都是由外部确定的。由(3.4—4)，政府部门固定资产的人均占有量的均衡状态为$k_*^2 = e^{-n}g_*/(1-\beta)$，将其代入(3.5—3)，则非政府部门固定资产的人均占有的均衡状态由下式结定：

$$(1-\beta)\,k_*^1-\bar{S}\{k_*^1+e^{-n}g_*/(1-\beta)\}^{\alpha} \tag{3.5-5}$$

其中：$\bar{S}=\hat{S}_t=e^{-n}S_t$。

在(3.5—5)中，k_*^1可由直线$y=(1-\beta)x$和曲线$y=\bar{S}\{x+e^{-n}g_*/(1-\beta)\}^{\alpha}$的交点来确定。

因为人均固定资产的均衡状态在两个部门里都被确定了，我们就可以在k_*处将$\hat{S}y_t(k_t^1,\ k_t^2)$展成泰勒级数，并只保留到一阶的项：

$$\begin{aligned}\bar{S}(k_t^1+k_t^2)^{\alpha}=&\bar{S}(k_*^1+k_*^2)^{\alpha}+\alpha\bar{S}(k_*^1\\&+k_*^2)^{\alpha-1}(k_t^1-k_*^1\\&+k_t^2-k_*^2)+\cdots,\end{aligned}$$

由(3.5．3)有$\bar{S}(k_*^1+k_*^2)^{\alpha-1}=(1-\beta)k_*^1/(k_*^1+k_*^2)$，这样便得到：

$$\begin{aligned}\bar{S}(k_t^1+k_t^2)^{\alpha}=&(1-\beta)k_*^1\\&+\frac{\alpha(1-\beta)k_*}{k_*^1+k_*^2}\{(k_t^1-k_*^2)\\&+(k_t^2-k_*^2)\}+\cdots\end{aligned} \tag{3.5—6}$$

将这个表达式代入(3.5—2)，便得到(3.5—2)的线性化的状态空间方程。令$z_t^i=k_t^i-k_*^i$，$i=1,2$，由(3.5—3)、(3.5—4)和(3.5—6)，并保留与z_t^1和z_t^2是线性关系的那些项，便有：

$$z_{t+1}^1 = \beta z_t^1 + \frac{\alpha(1-\beta)k_*^1}{k_*^1 + k_*^2}\ (z_t^1 + z_t^2)$$

$$z_{t+2}^2 = \beta z_t^2 + e^{-n}(g_t - g_*)$$

将这两个式子写成向量矩阵形式，则(3.5—2)的线性化的近似动态方程为：

$$z_{t+1} = Az_t + bx_t \qquad (3.5—7)$$

其中：$z_t = \begin{pmatrix} z_t^1 \\ z_t^2 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-n} \end{pmatrix}$，$x_t = g_t - g_*$

且有：

$$a_{11} = \beta + \frac{\alpha(1-\beta)k_*^1}{k_*^1 + k_*^2},$$

$$a_{12} = \frac{\alpha(1-\beta)k_*^1}{k_*^1 + k_*^2},\ a_{22} = \beta。$$

现在来看(3.5-7)的稳定性。显然，当$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ 0 & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) = 0$时，则有$\lambda_1 = a_{11}$，$\lambda_2 = a_{22} = \beta$，于是便有：

$$\lambda_1 = \beta + \frac{\alpha(1-\beta)k_*^1}{k_*^1 + k_*^2},$$

$$\lambda_2 = \beta = (1-\delta)e^{-n}$$

我们先来估计β。设劳动力的季度增长率为

4‰，则n＝0.004，又因e为自然对数，则有$\beta=(1-\delta)/e^{0.004}<(1-\delta)/e^{0}=(1-\delta)$，由于$\delta$是折旧率，所以，一般地说，有$0<\delta<1$。这样便得到：$0<\lambda_2=\beta<1$。现再看$\lambda_1$。由$0<\alpha<1$，有：

$$\lambda_1=\beta+\frac{\alpha(1-\beta)k_*^1}{k_*^1+k_*^2}<\beta+\frac{(1-\beta)k_*^1}{k_*^1+k_*^2}$$

$$=\frac{\beta k_*^1+\beta k_*^2+k_*^1-\beta k_*^1}{k_*^1+k_*^2}<\frac{k_*^2+k_*^1}{k_*^1+k_*^2}=1$$

因为$0<\lambda_1<1$，$0<\lambda_2<1$，所以(3.5—7)是大范围渐近稳定的。这样我们便得到人均固定资产占有量的增长（由(3.5—2)式表示）在输入—状态平衡偶(k_*, g_*)附近是局部严格稳定的。当然，这个结论要以人均固定资产占有量k_t的均衡状态k_*存在为前提。

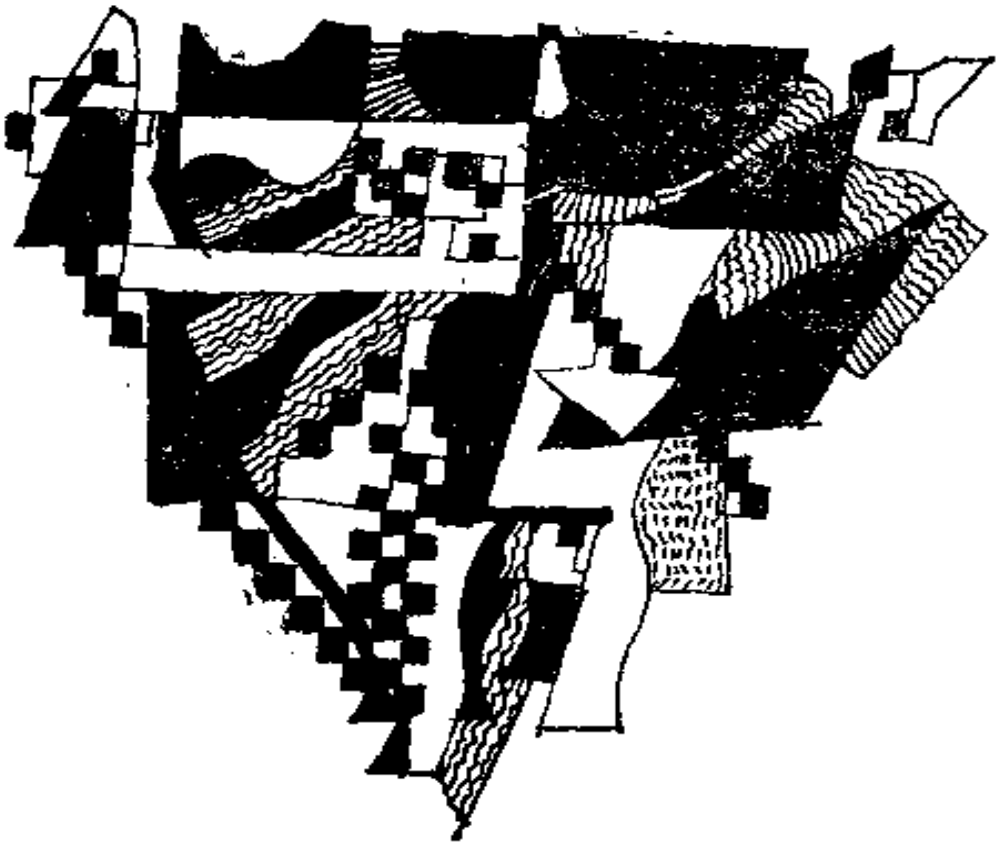
3_6 小结

通过以上几节的分析，我们可以看出稳定性的问题反映了动态经济系统的一个基本特征，即系统在外界扰动下保持自身平衡状态特性的一种能力——抗干扰能力。

那末，一个经济系统不稳定或发散意味着什么呢？

如果一个动态经济系统是不稳定的，那末在数学上就是说，当时间单位k趋向于无穷大时，它的状态向量的范数（大小）$\|z(k)\|$趋向于无穷大。如果我们的模型所反映的是一个实际的经济过程，那末情况十分明显：不论何种类型的经济系统，其变量都不可能无穷大。这时模型所反映的经济系统是不稳定的，随着时间的推移，它的变量会变得很大，这意味着整个经济系统最终将会瓦解或崩溃。或者是另一种情况：一个经济系统的数学模型，通常只有实际系统的变量处在一定范围内才成立，如果该数学模型不稳定，那就可能意味着实际系统的变量发生越来越大的变化，最终将使其进入另一种运行模式，这种模式需要用另一种不同的数学模型才能进行适当描述，而原来那个不稳定的数学模型则不适用了。

一个数学模型不稳定，还可能是它根本没有反映实际经济系统。这时必须重新建立模型。关于不稳定性，我们将在经济系统与耗散结构的有关章节中做进一步的分析。



第四章

动态经济系统的反馈与控制

控制理论研究的是控制和调节的一般理论问题，控制和调节的对象是系统。以系统为研究对象的学科有很多，而控制理论则是从控制和调节的角度来讨论系统的。经济系统在运行过程中最重要的问题之一就是控制和调节。大家知道，经济系统的目标是十分具体而明确的。在微观上，往往直接要求的就是经济效益。在宏观上，则往往要求整个经济计划的完成或保持均衡。如何达到目标，这是控制和调节的课题。

我们在前三章着重讨论的是动态系统本身的性质、表示及其定量描述，尚未涉及如何进行控制和调节的问题。本章开始讨论控制和调节的一般理论（即有关控制和调节的过程、机制及其描述）。其中一些核心概念，如反馈的概念，在经典控制论

中已着重介绍过，它们的直观意义对广大读者是并不陌生的。这里我们将从现代控制理论的高度对它们作严格的分析；同时，从控制和调节的角度出发，将介绍一个很有用的技术，它可以使经济系统具有决策者所要求的特性。

4_1 反馈的一般概念

“反馈”是当代最时兴的一个词。在经典控制论中反馈是控制的灵魂，所讨论的控制几乎就是反馈控制。在现代控制理论中，控制的涵义及其涉及的方面要广得多，但反馈仍是其中的核心概念。一般地说，没有反馈机制，就谈不上控制论意义上的控制。

为了说明反馈的基本概念，考虑一个离散时间动态系统，它的动态方程如下：

$$\begin{cases} z(k+1)=f[z(k),\ x(k)] & z(0)\text{已知} \qquad (4.1\text{—}1) \\ y(k)=g[z(k)] & \qquad (4.1\text{—}2) \end{cases}$$

把输出向量$y(k)$看为系统的响应变量，它们与系统所必须完成的特定任务直接相关。一般通过

定义一个所需要的输出序列来说明系统的特定目标，此输出序列表为：

$$y^*(0),\ y^*(1),\ \cdots,\ y^*(k) \qquad (4.1-3)$$

例如，$y^*(0)$为开始时的（煤产量、钢产量、粮产量），$y^*(k)$为第k年的（煤产量、钢产量、粮产量），这样$y^*(0)$，…，$y^*(k)$就表示了一个长期计划的逐年目标值序列，我们希望的是对于$k=0, 1, 2, \cdots, N$，使实际的输出向量$y(k)$接近于所要求的向量（即经济计划规定要完成的任务）$y^*(k)$，其中N为所关心的最终时刻——如某个经济计划的终止期（可以是无限大）。

如果没有外部输入（即政策控制变量）施于上述系统，即若$x(k)=0$，对所有$k=0, 1, 2, \cdots$，则系统的自然响应〔这种情况下的状态以$z_0(k)$表示，输出以$y_0(k)$表示〕可由下列方程求出：

$$\begin{cases} z_0(k+1)=f[z_0(k), 0], & z_0(0)\text{已知} \\ y_0(k)=g[z_0(k)] \end{cases}$$

往往有这样一些情形，如图4.1所示，自然响应序列$\{y_0(k)\}$比起所要求的响应序列$\{y^*(k)\}$有着某些不希望有的特性。例如，在图4.1a中，自然响应和所要求的响应大体上相同，但系统的动作过于迟缓，在图4.1b中，自然响应围绕着所要求的响应

振荡；在图4.1c中，自然响应是发散的（离要求越来越远）。

当然，在理论上我们最希望的是$y_0(k)=y^*(k)$，对所有的k。但一般说来这是无法实现的，

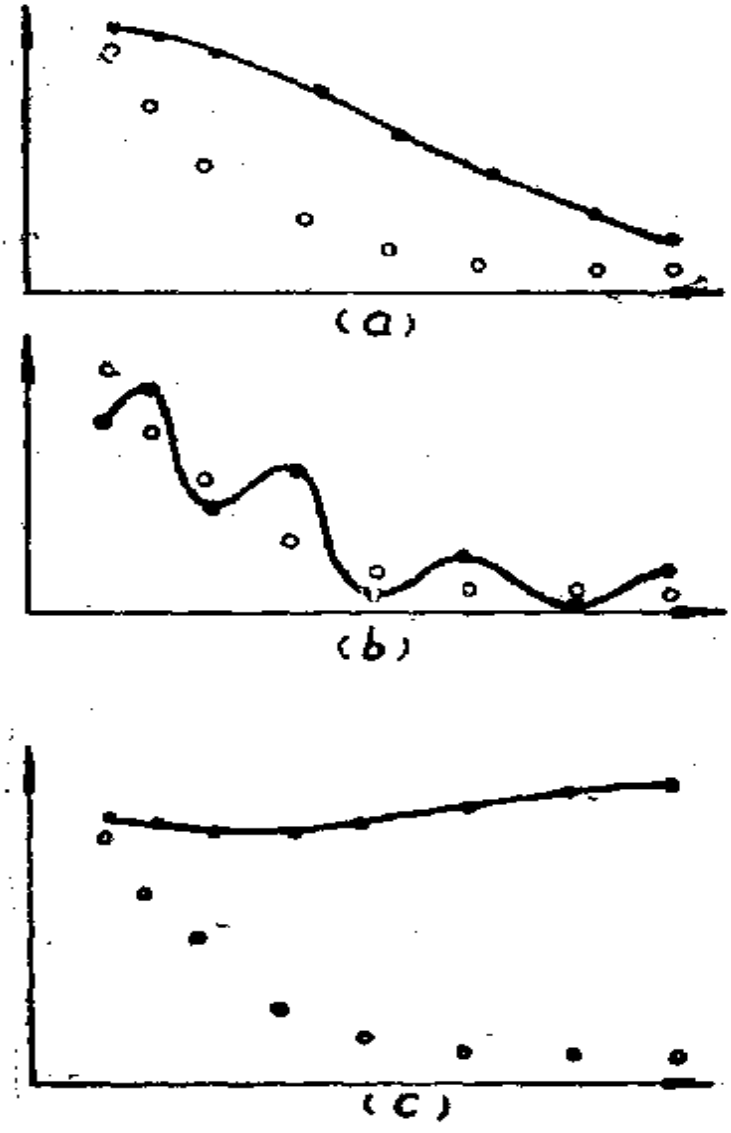


图4.1　自然响应的几种情况

·所要求的响应　·自然响应

而且也是不必要的。要使系统的输出序列{y(k)}逐步接近所要求的序列{y*(k)}，我们所能采取的唯一手段是施加一个输入序列{x(k)}到系统上去，以影响系统的响应。显然，选择不同的输入序列{x(k)}，就可以产生不同的输出序列{y(k)}。

控制问题的一般提法是：给定由方程(4.1—1)和(4.1—2)所描述的系统，以及所要求的输出序列{y*(k)}，需要求出输入序列{x(k)}，使得系统的实际输出序列{y(k)}在某种意义上接近于所要求的序列{y*(k)}。

对于实际响应和所要求响应之间的接近程度，可以有多种多样的描述。在现代控制理论中，用一个单一数量$J=\sum_{k=0}^{N}\left\|y(k)-y^*(k)\right\|^2$或$J=\sum_{k=0}^{N}[y(k)-y^*(k)]H[y(k)-y^*(k)]$，来衡量接近的程度。这样的数量常称之为目标函数或代价泛函。其中，N表示所关心的时间周期的长度（比如考虑的是五年计划，则N＝6）；H是一已知的n×n矩阵，它是度量差向量$[y(k)-y^*(k)]$偏离程度的加权因子矩阵，可由实际问题的具体要求或经验数据确定。

这样，上述控制问题可从两方面来分析。

第一，给定方程(4.1—1)和(4.1—2)以及要求的输出序列(4.1—3)，寻找输入或控制序列$\{x(k)\}$，$0 \leqslant k \leqslant N-1$，由(4.1—1)和(4.1—2)求得的输出序列$\{y(k)\}$，代入上述目标函数J后，J取最优值（最大或最小）。这类控制问题，称为最优控制问题。这在下章加以分析。

第二，对于图4.1c中的情形，当然首先要解决的问题是使$y(k)$不要发散。因此，“在某种意义之下接近”的提法，从直观上更易想到的是选取控制序列$\{x(k)\}$，使$y(k)$关于$y^*(k)$是（渐近）稳定的，即选取控制序列$\{x(k)\}$，使得$\lim_{k\to\infty}||y(k)-y^*(k)||=0$。这类控制问题称为稳定控制问题。本章就主要讨论这种控制问题。

如果所选取的输入序列是预定的，在系统运行中不再变更，这样的控制方式就叫做开环控制，弗里德曼所主张的货币政策就是开环控制。因为他主张政府每年保持一定的货币供给增长率（如4%），其他不再予以过问。

另一方面，往往可以把现时的输入$x(k)$选为现时以及以往测量结果的函数。例如，如果我们能测量输出向量$y(k)$，我们就可将时间k时的控制向量$x(k)$安排为现时和以往的输出测量值：$y(0)$，

$y(1)$，…，$y(k)$的函数，并记为 $x(k)=x[y(0),\cdots,y(k)]$。

类似地，如我们能测量状态向量，就能将现时的控制向量$x(k)$表为现时和以往测得的状态的函数，记为$x(k)=x[z(0),\cdots,z(k)]$。

在这两种情况下，政策控制变量$x(k)$依赖于实际观察到的结果。这两种控制方式统称为反馈控制（或闭环控制）。前者称为输出反馈控制，后者称为状态反馈控制。

凯恩斯的财政政策就属于闭环反馈控制，因为财政政策要根据经济系统的实际状态来制定。

4.2 线性系统的反馈控制及状态反馈

为了说明反馈控制的设计方法及其作用，考虑如下的线性时不变系统的状态方程：

$$z(k+1)=Az(k)+Bx(k) \qquad z(0)\text{已知} \tag{4.2—1}$$

式中：$z(k)$——n维状态向量；

$x(k)$——m维控制（或输入）向量；

A——$n\times n$常数矩阵；

B——$n \times m$常数矩阵。

设系统由一指定的初始状态$z^*(0)$开始，并且已经有了一个指定的输入序列$x^*(0)$，$x^*(1)$，$x^*(2)$，…。该输入序列产生一个对应的状态序列$z^*(0)$，$z^*(1)$，$z^*(2)$，…。该状态序列在某种意义上就是所要求的。这时所要求的状态序列$\{z^*(k)\}$和产生该序列的输入控制序列有如下的关系：

$$z^*(k+1) = Az^*(k) + Bx^*(k) \qquad (4.2-2)$$

此时，系统的输出序列也就由相应的输出方程决定。

另一方面，如果系统的初态$z(0)$和所设想的$z^*(0)$不同，或者在一段时间里，实际的输入$x(j)$，$0 \leqslant j \leqslant k$和规定的$x^*(j)$不同，则在k时就会发现实际状态$z(k)$和所要求的状态$z^*(k)$不同。一般地说，这种偏离是不可避免的。但是，能够做到的是：要求从此以后这种偏离最终将消失。粗略地说，我们希望选取控制序列$\{x(k)\}$，使得差向量$[z(k)-z^*(k)]$趋于零向量（当$k \to \infty$时）。怎样做到这一点呢？为此，定义状态扰动向量$\delta z(k)$为：

$$\delta z(k) \triangleq z(k) - z^*(k) \quad k = 0, 1, 2, \cdots \qquad (4.2-3)$$

并定义控制校正向量$\delta x(k)$为：

$$\delta x(k) \triangleq x(k) - x^*(k) \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{4.2—4}$$

这样，在每一时刻k，$\delta z(k)$就反映了实际系统的状态偏离所要求值的程度，$\delta x(k)$反映实际的输入与预先计划好的输入$x^*(k)$相差多少。

为求出$\delta z(k)$和$\delta x(k)$的动态联系，由方程(4.2—1)减去(4.2—2)，并利用(4.2—3)和(4.2—4)，便得到向量差分方程：

$$\delta^z(k+1) = A\delta z(k) + B\delta x(k) \tag{4.2—5}$$

(4.2—5)集中地表明了$\delta x(k)$是怎样用来控制$\delta z(k)$的。例如，若$\delta x(k) \approx 0$，即$x(k) = x^*(k)$，则有：

$$\delta z(k+1) = A\delta z(k) \tag{4.2—6}$$

至于$\delta z(k)$在以后如何演变，那就取决于矩阵A的性质了。

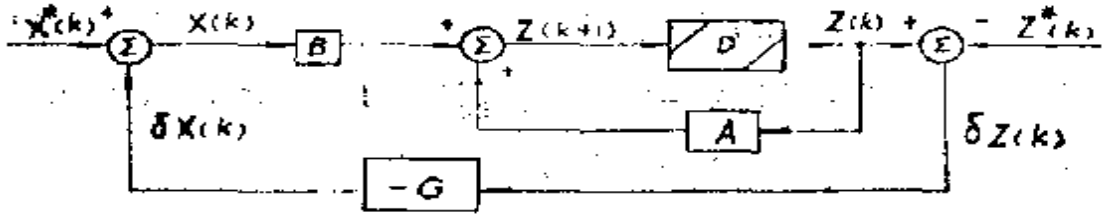
系统(4.2—6)是否稳定，取决于A的特征值。但是，即使它是稳定的，它的响应（亦即误差向量的演变过程），也仍可能太迟缓或者是周期波动的，因而难以令人满意。这就需要施加某种控制作用以改善其性能。

产生控制向量$\delta x(k)$有一个简单而有常用的方

法，就是利用线性负反馈。也就是说控制是由下式产生的。

$$\delta x(k) = -G\delta z(k) \qquad (4.2—7)$$

其中：G为一m×n增益矩阵。换言之，在k时测量误差向量$\delta z(k)$，并将它乘以常数增益矩阵G。总的系统的框图如图4.2所示。



其中：□的含义为倒回一步　Σ为加和　□ □ □为矩阵

图4.2　反馈控制系统的结构

这样，会产生什么效果呢？将(4.2—7)代入(4.2—5)，得到：

$$\delta z(k+1) = A\delta z(k) - BG\delta z(k) \qquad (4.2—8)$$

或：

$$\delta z(k+1) = (A - BG)\delta z(k) \qquad (4.2—9)$$

通过引入反馈，我们可由方程(4.2—9)得到误差向量的时间函数。误差向量$\delta z(k)$如何演变，就取决于闭环矩阵$\overline{A} = A - BG$的性质。于是可以对反馈的作用作这样的解释：它将方程(4.2—6)中的矩阵A所确定的开环系统的误差动态（关系），改变

成由方程(4.2—9)中的闭环矩阵（A－BG）所确定的闭环动态（关系）。

可以更形象地作这样的说明：矩阵A反映了经济系统的结构，一般是不能轻易地加以改变的，改变A就改变了系统。在实际经济生活中，系统大部分是给定的，不能任意加以变更。当然，改变A也并非绝对不可能。如我国现在所进行的体制和机构改革，就是要改变系统的结构。但这样的改革不能经常进行，尤其不能轻易进行。于是通常可以走较为容易的道路，即引入反馈调节回路。也就是说，我们虽不改变基本结构A，但却可以通过使经济系统的性质不再由A单独确定，而是由A－BG共同确定，来改变经济系统的性能。引入G比直接改变A要容易得多，如在以计划经济为主体的经济结构中引入市场调节机制。

显然，由于$\bar{A}$中的矩阵G是可以选取的，因此可以通过G的适当选取，来改进系统(4.2—5)的性能。特别地，可以利用反馈使系统得到稳定。假设A有一个或几个特征值的绝对值大于1，这样原有的齐次系统$z(k+1)=Az(k)$和误差系统(4.2—6)都是不稳定的。但是，除了某些特殊情况，我们至少可以找到一个矩阵G，使得闭环矩阵A－BG的特

征值的绝对值都小于 1，从而使系统(4.2—9)是渐近稳定的，即当$k\to\infty$时，有$\delta z(k)\to 0$，或$z(k)\to z^*(k)$。

实际情况确实是这样的，除了某些特殊情况外，对于相当任意给定的矩阵 A、B，我们总能够求出矩阵 G，使得$A-BG$的所有特征值均取为预定的值（当 A、B、G为实数矩阵时，复特征值必须以复共轭对出现）。由于矩阵$A-BG$的特征值决定系统各状态的时间演变进程(见3.1的特征值解法)，利用反馈可以获得一给定系统的各种不同的动态特性，并且可以按照我们的意愿改变它们。

现在以一准确的形式来说明在什么条件下能够保证至少找到一个矩阵G，使得$A-BG$的特征值为预定的值。这一条件就是系统具有可控性，换言之，即（A | B）是一可控对。

现在叙述定理。

定理 1 设A为任一$n\times n$实数矩阵，B为任一$n\times m$实数矩阵，并设（A|B）为一个可控对，则至少存在一个$m\times n$实数矩阵G，使得（闭环矩阵）$A-BG$的特征值λ_1，…，λ_n等于预定值。由于$A-BG$是实数矩阵，特征值λ_i必须或者是实数，或者以共轭复数对出现。

证明从略。

如果线性负反馈控制决策$\delta x(k) = -G\delta z(k)$使$A-BG$的所有特征值的绝对值都$\leqslant 1$，则称该控制决策是稳定的（或渐近稳定的）。

可见，系统状态的完全可控性是稳定的（渐近稳定的）控制决策的充分条件。这就是稳定性与可控性的联系。

例 1 宏观经济模型的反馈控制

设$y(k)$、$c(k)$、$I(k)$、$U(k)$分别表示第 k 季度的国民收入、消费、投资和政府支出，并设这些变量之间有如下关系：

$$y(k) = c(k) + I(k) + U(k)$$

$$c(k) = by(k-1)$$

$$I(k) = a[c(k) - c(k-1)]$$

其中：a、b为已知常数。这个方程组是经济系统的结构方程组。下面将其写成状态空间形式：

$$z(k+1) = Az(k) + Bx(k)$$

$$y(k) = \overline{c}\,z(k) + Dx(k)$$

其中：$z(k) = \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(k) \\ I(k) \end{pmatrix}$

为二维状态向量，即用消费和投资情况来表示系统

状态；$x(k)=U(k)$为一维输入向量（输入变量），即用政府支出作为控制经济活动的手段；$y(k)=y(k)$为一维输出向量（输出变量），即系统的输出（亦即系统的目标）是国民收入。这时有

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -ab & (1+a)b\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix},\quad \overline{c}=(-a,1+a),$$

$D=1$。可控性矩阵为

$$[B,\ AB]=\begin{pmatrix}0 & b\\ b & (1+a)b^2\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & (1+a)b\end{pmatrix}。$$

易见，$(A|B)$是一个可控对。所以，这个经济系统可以通过线性负反馈控制决策来使其稳定（或渐近稳定）。

取$a=2$，$b=1$时，A的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，系统是不稳定的。为此，取$x(k)$的反馈形式为

$$x(k)=Gz(k)=(g_1,\ g_2)\begin{pmatrix}z_1(k)\\ z_2(k)\end{pmatrix},\ \text{则有}$$

$$\overline{A}\triangleq A+BG=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}(g_1,\ g_2)$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2+g_1 & 3+g_2\end{pmatrix}。$$

于是有

$$\left|\lambda I-\overline{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 2-g_1 & \lambda-(3+g_2)\end{vmatrix}=\lambda^2-(3+g_2)\lambda+(2-g_1)=0。$$

1.若$g_1\neq 0$，$g_2=0$，亦即没有g_2这个控制分量的作用，则有$\lambda^2-3\lambda+2-g_1=0$，得到$\lambda=\frac{3\pm\sqrt{1+4g_1}}{2}$。显然，$|\lambda|$至少有一个大于1，此时系统仍然不稳定。

2.若$g_1=0$，$g_2\neq 0$则有$\lambda^2-(3+g_2)\lambda+2=0$，得到$\lambda=\frac{3}{2}+\frac{g\pm\sqrt{1+6g_2+g_2^2}}{2}$。显然，$|\lambda|$至少仍有一个大于1，系统还是不稳定。

3.若$g_1\neq 0$，$g_2\neq 0$，例如取$g_1=2$，$g_2=-3$，则$\lambda_1=\lambda_2=0$，此时系统稳定。

由1至3，可得出如下结论：（1）仅控制$z_1(k)$或仅控制$z_2(k)$不能改变上述系统的不稳定性；（2）同时控制$z_1(k)$和$z_2(k)$两个分量时，亦即同时控制消费和投资，才能使该经济系统稳定。

4-3 输出反馈

在以上的分析中，我们假定了系统的所有状态

变量都是能够测量的。可是，在许多问题中，我们只能测量输出变量。在这类问题里，仍可利用由输出向量的反馈去构成控制向量，从而改变开环动态特征。但是，随意选定闭环系统的特征值，则要受到比状态反馈时更多的限制。

为此，考虑系统：

$$\begin{aligned} z(k+1) &= Az(k) + Bx(k) \\ y(k) &= Cz(k) \end{aligned} \qquad (4.3-1)$$

式中：$z(k)$为n维向量；

$x(k)$为m维向量；

$y(k)$为L维向量；

A—$n \times n$为常数矩阵；B—$n \times m$常数矩阵；C—$L \times n$常数矩阵。

假设我们的目标是要调节或控制状态向量$z(k)$，使其由任意初始状态变到接近于零，即所要求的$z(k)$的值是零向量。开环系统〔即在(4.3—1)式中，$x(k)=0$的系统〕可能不稳定、迟缓或振荡，因此我们要寻找改善其性能的方法。

1.用输出反馈来调节系统的状态

如果我们能够测量输出向量$y(k)$〔而不是状态向量$z(k)$〕，那末，就可以用线性输出反馈来产生

控制向量x(k)，即用下式来计算x(k)。

$$x(k) = -Hy(k) \qquad (4.3-2)$$

其中：H为一m×L维的常数输出增益矩阵。所得的系统的结构框图如图4.3所示。

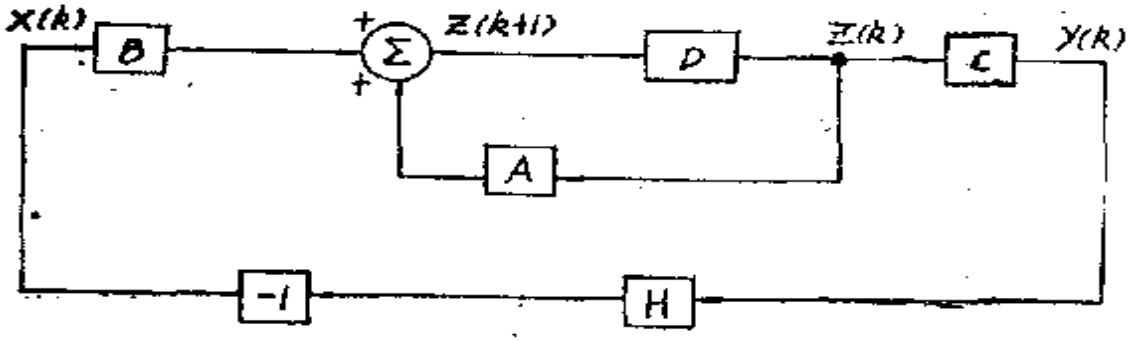


图4.3 输出反馈调节器的结构

以下要导出闭环系统的特性。由(4.3—1)、(4.3—2)可得$x(k) = -Hy(k) = -HCz(k)$，于是闭环系统将依照$z(k+1) = (A - BHC)\,z(k)$而变化。反馈系统的动态特性决定于闭环矩阵(A－BHC)的特征值。为了稳定，对于任何给定的矩阵A、B、C，我们愿意这样选择矩阵H，使得A－BHC的特征值的绝对值都小于1。这可能做到，也可能做不到，以下的两个例子说明了这一点。

例2 考虑下述二阶离散单输入、单输出系统

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{bmatrix}}_{z(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix}}_{z(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{x(k)}_{x(k)}$$

$$y(k)=\underbrace{[1,\ 0]}_{C}\underbrace{\begin{pmatrix}z_1(k)\\ z_2(k)\end{pmatrix}}_{z(k)}$$

开环系统矩阵A的特征值为：$\lambda_1=2,\lambda_2=-1$，所以开环系统是不稳定的。要用输出反馈使系统稳定，便要求一数量H的值，使 $x(k)=-Hy(k)$，并且使闭环矩阵

$$\overline{A}\triangleq A-BHC=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}H[1,\ 0]$$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\2-H&1\end{pmatrix}$$

的特征值的绝对值小于1。$\overline{A}$的特征值为$\det(\lambda I-\overline{A})=0$的根，而

$$\det(\lambda I-\overline{A})=\det\begin{pmatrix}\lambda&-1\\H-2&\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$=\lambda^2-\lambda+H-2,$$

因此，$\lambda=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-4(H-2)}$。易见，存在H取值的一个范围，能使两个$\lambda$的绝对值都小于1。当取$H=\frac{9}{4}$时，便有一个重复的特征值$\lambda=\frac{1}{2}$，所以$\overline{A}$是稳定的。

例3 考虑另一个二阶系统

$$\begin{pmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} x(k)$$

$$y(k) = \underbrace{(1,\ 0)}_{C} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{pmatrix}$$

A的特征值为$\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = -1$，所以开环系统是不稳定的。注意：这些特征值的绝对值与上例相同。

为稳定该系统，要求出一个数量H，使得采用输出反馈$x(k) = -Hy(k)$后，闭环矩阵

$$\overline{A} \triangleq A - BHC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} H (1 \quad 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2-H & -3 \end{pmatrix}$$

的特征值的绝对值小于1。

$\overline{A}$的特征多项式为：

$$\det(\lambda I - \overline{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2+H & \lambda+3 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 + H$$

其根为：

$$\lambda = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9-4(2+H)}$$

显然，没有一个H值能使此式的两个根的绝对值都小于1，因此这个系统的状态不能用输出反馈来使其稳定。

但是这个系统的状态可用状态反馈来使其稳定，因为秩(B，AB)=秩$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$=2，所以这是一个可控对，由定理4.1可知能够用状态反馈来使其稳定。

例3表明，用状态反馈调节系统状态比用输出反馈调节系统状态的可能性要大。

2.用输出反馈来控制系统的输出

从上面的例子可见，即使(A|B)是可控对，也不一定能用输出反馈来使系统的状态得到稳定。但是，在不少情况下我们所关心的仅仅是通过输入加以调节和控制输出的问题。至于系统内部状态如何，并无严格的要求。例如输出调节器问题，关心的是如何设计调节器，使得输出调回到平衡位置上来（即使得y(k)=0）。对于绝对输出可控问题，是如何设计调节机构，使得输出能够跟随给定值信号（如国家的主要经济目标）而变。对于这样一些

问题，常常不要求考虑系统的内部状态。在这样的情况下，系统中可能存在着可观测但不可控的子系统和既不可控又不可观测的子系统（如自负盈亏企业），即使这些子系统是不稳定的（例如这些自负盈亏企业可能停产、关门或转产），也对我们所考虑的问题（如国家所关心的主要问题）无关。那末，什么样的系统可以对其输出进行控制呢？这种系统就是前面讲过的具有输出可控性的系统。下面看两个例子。

例 4 研究系统的输出可控性

$$S_2\begin{cases} z_1(k+1) = -0.5z_1(k) + 2z_2(k) + x(k) \\ z_2(k+1) = 3z_2(k) \\ y(k) = z_1(k) - z_2(k) \end{cases}$$

易见，$A=\begin{pmatrix} -0.5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，$B=b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，而 $C'B=(1\ \ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=1$，$C'AB=(1,\ -1)\begin{pmatrix} -0.5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=-0.5$，所以，$(C'B, C'AB)=(1,-0.5)$的秩与y的维数相等。故系统是输出可控的。

系统的特征方程为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda+0.5 & -2 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$=(\lambda+0.5)(\lambda-3)=0$，特征根为 $\lambda_1=-0.5$，$\lambda_2=3$，所以系统是不稳定的。系统S是由S^A,S^C两个子系统所组成。S^A的特征根为$\lambda_1=-0.5$，是稳定的；S^C的特征根为$\lambda_2=3$，是不稳定的。作为输出$y(k)=z_1(k)-z_2(k)$，由于$z_2(k)$的影响，y也是不稳定的，即在$x=0$的情况下，$\lim_{k\to\infty}y(k)=\infty$。对于这种系统，可以把$S^A$作为调节对象，$S^C$作为外界干扰，由此设计一个调节器，使得系统达到输出调节，即$\lim_{k\to\infty}y(k)=0$。

从这个例子可见，只要假定调节对象是输出可控的，即使有不稳定的S^C子系统存在，也可设计一个输出反馈系统，使其达到输出调节。

例 5 研究下述系统的输出可控性

$$S:\begin{cases}z_1(k+1)=-0.5z_1(k)+5z_2(k)+x(k)\\ z_2(k+1)=2z_2(k)\end{cases}$$

$$y=\begin{pmatrix}y_1(k)\\ y_2(k)\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}z_1(k)\\ z_2(k)\end{pmatrix}$$

易见，$A=\begin{pmatrix}-0.5 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$B=b=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。由于$CB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，$CAB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.5 & \\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.5\\ 0\end{pmatrix}$，故$(CB,CAB)=$

$\begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$的秩为1，小于y的维数，所以系统不是完全输出可控的。

系统的特征方程为$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 0.5 & -5 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$

$= (\lambda + 0.5)(\lambda - 2) = 0$，其特征根为$\lambda_1 = -0.5$，$\lambda_2 = 2$，故系统是不稳定的。系统由$S^A$、$S^C$两个子系统构成，$S^A$是稳定的，$S^C$是不稳定的。但由于输出不可控，对于输出分量$y_2(k)$无法实现控制和调节。

从这个例子可见，对于输出不可控的对象，是无法实现输出的控制和调节的。这时，为了达到输出的控制和调节，必须改变输入（即控制作用）的安排，使得对象是输出可控的。

例6 令Δy_t为第t季度的实际产出的变化（即$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$），$\Delta M_t$为第t季度货币存量的变化，$\Delta Y_t$为第t季度利息率的变化。

设有下式描述的经济系统：

$$\Delta y_t = a_1 \Delta y_{t-1} + a_2 \Delta y_{t-2} + a_3 \Delta M_{t-1}$$

其状态空间表示如下：

$$z_{t+1} = Az_t + bx_t$$

其中：

$$z_t=\begin{pmatrix}\Delta y_t\\ \Delta y_{t-1}\end{pmatrix},\quad x_t=\Delta M_t,\quad A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$b=\begin{pmatrix}a_3\\ 0\end{pmatrix}$$

取目标变量为Δr_t，由下式给定：

$$\Delta r_t=b_1\Delta y_t+b_2\Delta M_t$$

这样，输出方程即为下式：

$$y_t=cz_t+ex_t$$

其中：$c=(b_1,\ 0)$，$e=b_2$

由于Δy_t受ΔY_{t-1}，Δy_{t-2}，ΔM_{t-1}的影响，因此，从输出方程可以看出，可以通过控制货币存量的变化直接或间接地控制利息率变化。这是一个输出可控的问题。

该模型的输出可控性矩阵为$[Cb,\ CAb,\ e]=(b_1a_3,\ b_1a_1a_3,\ b_2)$，显然该模型是输出可控的。

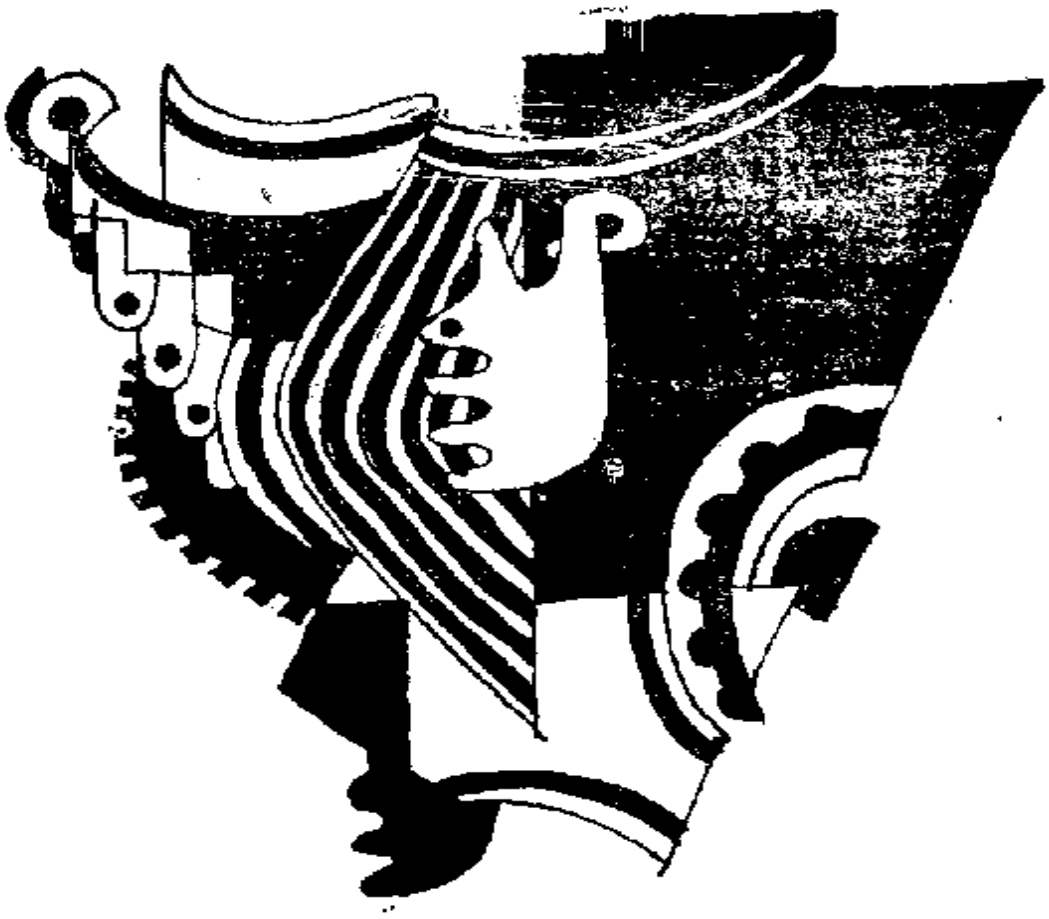
因此，可以通过控制变量ΔM_t——货币政策，使利息率的变化为零，即使利息率保持不变。

一般地说，由于观测矩阵C是$L\times n$阶的，根据输出可控性判定，输出可控的一个必要条件是C的秩为L。当C的秩为$l\leqslant n$时，如果系统又是完全可控的，则它也一定是完全输出可控的（例6就是如此）。反之则不然。

4-4 小结

本章一开始就介绍了反馈机制在控制过程中的作用。通过反馈进行控制的基本形式有两种：一是状态反馈，一是输出反馈。由于状态变量有的不易观测，因此状态反馈有一定难度；而输出变量一般都可观测，因此输出反馈容易实现。但是，通过本章的分析可以看出，系统的输出特性难以反映控制对象的内部状态，因而用输出反馈不可能完全控制经济系统状态变化，这就难于实现最优控制。

在下一章里，将会看到由于状态变量包括了系统运行的所有信息，因而使用状态控制器可以实现对经济系统的最优控制。



第五章

动态经济系统的最优控制

在第四章中讲了如何通过状态反馈和输出反馈对经济系统进行稳定控制的问题，这一章要对最优控制这个问题作较为详细的描述和分析；第三章分析了系统的可控性与稳定性的关系，这一章还要进一步分析可控性、可观性、稳定性和最优控制决策之间的关系。同时，还要对获得信息的方式以及实现最优控制的途径作一些分析。

5-1 最优控制问题的一般提法

简单地说，动态经济系统的最优控制就是找出一个控制变量序列，使经济系统达到最佳的目标。这涉及到什么是最佳目标，如何选取相应的控制变

量序列。解决最优控制问题的方法有很多，如变分法、极大值原理、动态规划等。这一章只介绍动态规划解法。为此，必须首先知道离散时间系统的最优控制问题的提法。下面先看一个生产—库存系统的例子。

例 1 生产—库存系统

设某厂全年生产产品 A，第 k 季度的产量为 $x(k)$，生产费用为$ax^2(k)$元。该厂有一存放产品的仓库，每件产品的库存费用为b元。设订货计划如下表：

季 度	1	2	3	4
订货量(件)	600	700	500	1,200

又设第k季度初的库存量为$z(k)$，第k季度的销售量为 $s(k)$，且销售量等于订货量，则 $z(k)$、$x(k)$、$s(k)$之间的关系是：

$$z(k+1)=z(k)+x(k)-s(k)$$

$$k=1,\ 2,\ 3,\ 4 \qquad (5.1—1)$$

要求：

$$z(1)=0,\ z(5)=0 \qquad (5.1—2)$$

(5.1—2)式的涵义是：年初开始生产时的库存

为0（即系统的初始状态为0），年末生产结算（即明年初）时库存也为0（即系统的终端状态也为0），分别称为初始条件和终端条件。z(k)称为系统的状态变量，也就是用库存量的变化来衡量经济系统的状态变化；x(k)称为控制变量，即可用它（生产量）作为调节和改变经济系统状态（库存量）的手段；s(k)为外界输入（或外生变量，即系统本身所不能控制的因素），为已知参数。方程(5.1—1)称为该系统的状态方程。

这个经济系统的最优控制问题是：求全年生产计划的最优决策，使之能正好完成订货计划，而且总费用（生产费用加上库存费用）最小。总费用函数为：

$$J_4 = \sum_{k=1}^{4} [ax^2(k) + bz(k)] \qquad (5.1—3)$$

其中：4表示对四个季度的生产费用求和。因此，这个问题可看成四个阶段的决策问题，即求最优决策（最优产量数）序列x(1)、x(2)、x(3)、x(4)，使J_4取最小值。J_4称为问题的目标函数。

状态方程(5.1—1)，初始条件和终端条件(5.1—2)以及目标函数(5.1—3)，总称为这个生产—库存系统的最优控制问题的数学模型。

从这个例子我们还可以看出，一个经济系统的总产值并不是越高越好，若销售不出去，就会增加库存，则徒然增加生产费用（因为总费用中包括库存费用）。因此，这个例子用库存量的多少来衡量系统状态的好坏是恰当的。

将上述问题提练成一般的数学形式，那末离散时间系统最优控制问题的一般提法，即一般的离散系统的数学模型如下：

$$z(k+1)=f[z(k),\ x(k)]$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1 \qquad (5.1-4)$$

（初始条件）$z(0)=z_0$

目标函数为：

$$J_N=F[z(N)]+\sum_{k=0}^{N-1}L[z(k),\ x(k)] \qquad (5.1-5)$$

其中：$z(k)$和$x(k)$分别为n维状态向量和m维控制向量。$f(\cdot,\ \cdot)$是n维向量值函数，$L(\cdot,\ \cdot)$是一维数值函数。目标函数中的$F[z(N)]$体现了对最终状态（即终端条件）z_N的要求，当对终态z_N没有什么特殊的要求时，目标函数如下：

$$J_N=\sum_{k=0}^{n-1}L[z(k),\ x(k)]$$

离散时间的最优控制问题是：求满足约束条件

(5.1—4)的最优控制序列$x^*(0), x^*(1), \cdots, x^*(N-1)$，使目标函数$J_N$最优（最大或最小）。

这样的控制序列$x^*(0), \cdots, x^*(N-1)$，称为系统(5,1—4)的最优控制序列，简称最优控制。将最优控制代入(5.1—4)中的状态方程，并利用初始条件所解得的$z^*(1), z^*(2), \cdots, z^*(N-1)$，称为系统(5.1—4)的最优轨线。

如果模型还给定了终端条件$z(N)=z_N$，则约束条件就多增加了一个，即$z_N=f[z(N-1), x(N-1)]$。

对于离散时间系统的最优控制问题，多用动态规划求解。下面介绍该方法的基本结果。

5-2 动态规划方法

求离散系统最优控制的动态规划方法是由贝尔曼首先提出的。它的适用范围很广，可用于多输入、多输出系统，线性和非线性系统。为了说明这一方法的基本思想，首先举一个多阶段判决过程的例子，然后再介绍如何用动态规划解离散系统的最优控制问题。

1.动态规划的基本思想

为了有助于建立直观概念，先分析一个调度管理中的简单行车问题。假设有一辆车要从A点开到I点，道路分布和这辆车行经每条道路所需的时间均如图5.1所示。要问：这辆车怎样开才能最快地达到目的地？

从A到I共有6条不同的路线，把每条路线所需时间进行比较，自然可以找出最快的路线。这样

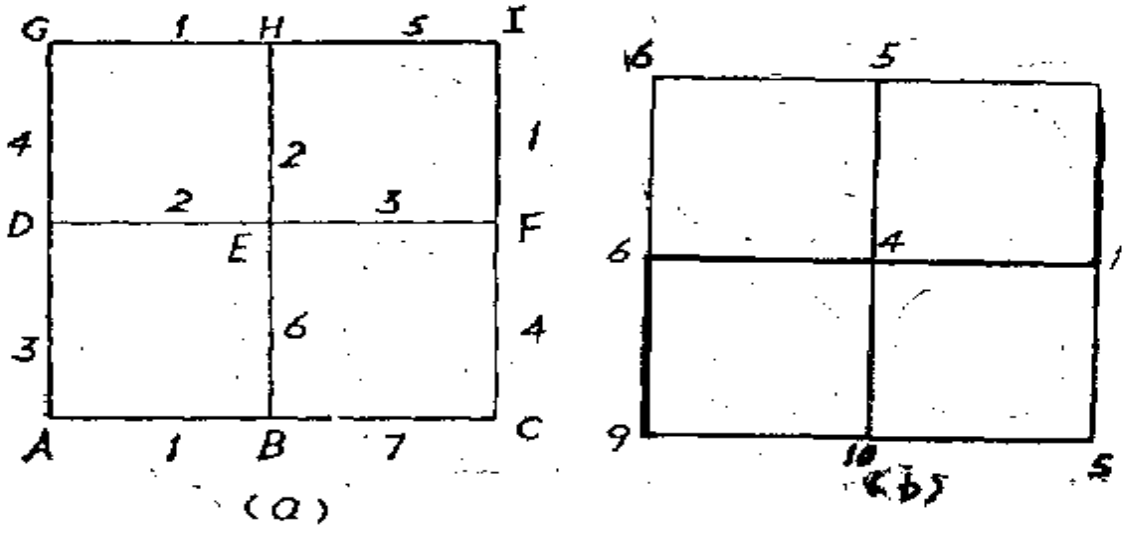


图6.1 行车图示

做虽然直截了当，但若碰到道路数目很多时，计算量太大，因而缺乏实用价值。

现在来这样想一想：先求出与I相邻两点H和F至I所需的最短时间，因为只有一种方法，故所

需时间分别是 5 和 1 。现在我们来看从 E点走到 I 点所需的最短时间。这时要作一个选择。易见，先横走所需时间是 4 ，先竖走所需时间是 7 。当然我们选前者。这样走所需时间最短，等于 4 ，把它记在 E上。同理，可依次把其余各点，包括 A点，走到 I 点的最快走法和所需的最短时间都计算出来，结果如图5.1b的粗黑线所示。

这个例子虽然简单，可是却把动态规划的基本思想都概括进去了。从本例可以看出，这种解决问题的方法有两个特点：第一，它是从 I 依次倒着往 A计算的，每个点的最快路线和最短时间都要算出来。第二，它把一个复杂的问题，即解决一整条路线的问题，变成许多个简单的问题，因而使问题的求解变得简单容易了。

2.最优控制问题的解

(1)最优性原理

为了简单起见，先就z(k)和x(k)都是一 维 的情况进行讨论。考虑下述系统：

$$z(k+1)=f[z(k),\ x(k)]$$

$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$$

$$z(0)=z_0 \qquad (5.2-1)$$

目标函数为：

$$J_N = \sum_{k=0}^{n-1} L[z(k),\ x(k)] \qquad (5.2—2)$$

目标函数J的下标N，表示由x(0)到x(N-1)的N步控制。问题是求最优控制x*(0)，…，x*(N-1)使J_N最小（或最大）。

由(5.2—2)，并逐次应用(5.2—1)可得出：

$$\begin{aligned} J_N &= L[z(0),\ x(0)] + L[z(1),\ x(1)] + \cdots \\ &= L[z(0),\ x(0)] + L\{f[z(0),\ x(0)],\ x(1)\} + \cdots \end{aligned}$$

因此，J_N依赖于初始状态z(0)，和控制序列x(0)，x(1)，…，x(N-1)，记为：

$$J_N = J_N[z(0),\ x(0),\ x(1),\ \cdots,\ x(N-1)]$$

如果已用某种方法得到了最优控制x*(0)，…，x*(N-1)，那末，J_N的最小值只依赖于初始条件，记为$J_N^*[z(0)]$。一般用$J_N^*(z)$表示初始状态为z、控制N步时的目标函数J_N的最小值。因此有

$$J_N^*[z(0)] = \min_{x(0),\ \cdots,\ x(N-1)} \{J_N[z(0),\ x(0),\ \cdots,\ x(N-1)]\}$$

动态规划引进最优性原理，并由它导出J_N^*和J_{N-1}^*之间的递推关系，将一个多步最优的问题化为多个一步最优的问题。

最优性原理　如果$x^*(0)$，$x^*(1)$，…，$x^*(N-1)$是上述最优控制问题的一个最优控制序列，则$x^*(1)$，…，$x^*(N-1)$一定也是一个最优控制序列，其初始状态是$z(1)=f[z(0), x^*(0)]$。最优性原理说明，N步最优控制序列的后N－1步，也构成最优控制序列。更一般地有，最优控制序列的一部分仍是最优控制序列。

（2）动态规划的基本方程

在控制系统中，如$x^*(0)$已求出，就可根据$x^*(0)$和初始条件，由状态方程算出$z(1)$，即：

$$z(1)=f[z(0), x^*(0)]$$

最优性原理说明，如$x^*(0)$已求出，求$x^*(1)$，…，$x^*(N-1)$的问题便构成了一个初始条件为$z(1)$的N－1步的最优控制问题。由前面引进的记号，这一问题的性能指标（即目标函数）的最小值记为$J_{N-1}^*[z(1)]$。由最优性原理有：

$$J_N^*[z(0)]=\min_{X(0),\cdots,X(N-1)}\{J_N[z(0),$$

$$x(0),\ \cdots,\ x(N-1)]\}$$

$$=\min_{x(0)}\ \{L[z(0),\ x(0)]+J^{*}_{N-1}[z(1)]\}$$

(5.2—4)

方程(5.2—4)称为动态规划的基本方程，它给出了$J_N^*[z(0)]$和$J^{*}_{N-1}[z(1)]$之间的递推关系。由这个递推关系，便可以从最后一步开始，把N步控制的问题化为N个一步控制的问题。

求解上式时，实际上是从最后一步开始的，即第一步由$J_1^*[z(N-1)]=\min_{x(N-1)} L[z(N-1),\ x(N-1)]$开始，并假定$z(N-1)$为已知，先对$x(N-1)$求$L[z(N-1),\ x(N-1)]$的最小值。求出的$x^*(N-1)$和$J_1^*[z(N-1)]$将依赖于$z(N-1)$。

然后进行第二步，将求得的$J_1^*[(z(N-1)]$代入：

$$\begin{aligned}J_2[z(N-2)] &= L[z(N-2),\ x(N-2)]\\ &\quad + J_1^*[z(N-1)]\\ &= L[z(N-2),\ x(N-2)]\\ &\quad + L[z(N-1),\ x^*(N-1)]\\ &= L[z(N-2),\ x(N-2)]\\ &\quad + L[f(z(N-2),\ x(N-2)),\\ &\quad x^*(N-1)]\end{aligned}$$

将z(N－2)看为已知的初始状态，对x(N－2)求上式的最小值$J_2^*[z(N-2)]$，求出的$x^*(N-2)$和$J_2^*[z(N-2)]$将依赖于z(N－2)。

如此类推，直至最后一步，求下式对x(0)的最小值$J_N^*[z(0)]$：

$$J_N[z(0)]=L[z(0),\ x(0)]+J_{N-1}^*[z(1)]$$
$$=L[z(0),\ x(0)]+J_{N-1}^*\{f[z(0),\ x(0)]\}$$

由上面的分析可见，利用动态规划基本方程(5.2—4)求解最优控制有如下几个特点：(1)将一个N步的控制问题化成N个一步的控制问题；(2)求解的顺序与实际控制过程的序列正好相反，即从最后一步开始，倒着往前求解；(3)各步求出的最优控制与前一步求出的最优目标函数之值有关；(4)直到求出最后一步(即整个N阶段控制)的最优控制$x^*(0)$，才是真正要求的结果。因$x^*(0)$只依赖于初始状态z(0)，而这是已知的。然后再由$z^*(1)=f[z(0),\ x^*(0)]$求出$z^*(1)$，从而求出$x^*(1)$；再由$z^*(2)=f[z^*(1),\ x^*(1)]$，求出$z^*(2)$，从而求出$x^*(2)$，…，这个过程一直进行下去，直到最后由$z^*(N)=f[z^*(N-1),x^*(N-1)]$求出$z^*(N)$。这时求解的顺序又回到实际控制过程

的顺序。

以上的讨论是对输入、输出都是一维而言的，对于多输入、多输出的方法完全类似。

3. 例子——生产—库存问题的解

为了具体地说明上述求解过程的特点，让我们求解前面所讲的生产—库存系统的例子。该问题的数学模型如下：

状态方程：

$$z(k+1)=z(k)+x(k)-S(k),\quad k=1,\cdots,4$$

初始条件和终端条件：

$$z(1)=0,\quad z(5)=0$$

目标函数：

$$J_4=\sum_{k=1}^{4}\{0.005x^2(k)+z(k)\}$$

其中，为简便，取$a=0.005$，$b=1$。

而$S(k)$，$k=1$，…，4，由下表确定：

这是 $N=4$ 的四阶段控制问题。按上面介绍的

季　　度	1	2	3	4
订货件数$S(k)$	600	700	500	1,200

方法分四步考虑。

第一步，考虑最后一个阶段（即第四季度）的控制，由基本方程(5.2—4)，应考虑$J_1=0.005x^2(4)+z(4)$对z(4)的最小值。由状态方程，z(5)=0，S(4)=1,200等条件，有z(5)=z(4)+x(4)−1,200=0。解得（注意：由上式可知x(4)只有一个解，也就是最优解）x*(4)=1,200−z(4)。代入J_1得$J_1^*[z(4)]=0.005[1,200-z(4)]^2+z(4)=0.005z^2(4)-11z(4)+7,200$。

第二步，考虑最后二个阶段（即第3、4两个季度）的控制。由基本方程(5.2—4)有：

$$J_2^*[z(3)]=\min_{x(3)}\{0.005x^2(3)+x(3)+J_1^*[z(4)]\}$$

$$=\min_{x(3)}\{0.005x^2(3)+x(3)+0.005z^2(4)-11z(4)+7,200\}$$

其中：由状态方程和订货表有 z(4)=z(3)+x(3)−500，代入上式得：

$$J_2^*[z(3)]=\min_{x(3)}\{0.005x^2(3)+x(3)+0.005[z(3)+x(3)-500]^2-11[z(3)+x(3)-500]+7,200\}$$

因$x^*(3)$应使上式右边{ }内的式子取最小值，故有$\frac{d\{\ \}}{dx(3)}=0.02x(3)-16+0.01z(3)=0$，解得$x^*(3)=800-0.5z(3)$（注意：为保证$x^*(3)\geqslant 0$，应有$z(3)\leqslant 1,600$）。入代$J_2$得$J_2^*[z(3)]=7,550-7z(3)+0.0025z^2(3)$。

第三步，考虑最后三个阶段（即第2、3、4季度）的控制，由(5.2—4)有：

$$J^*_3[z(2)]=\min_{x(2)}\{0.005x^2(2)+z(2)+0.0025[z(2)+x(2)-700]^2-7[z(2)+x(2)-700]+7,750\}$$

因$x(2)$应使上式右边{ }内的式子取最小值，故有$\frac{d\{\ \}}{dx(2)}=0.015x(2)+0.005z(2)-10.5=0$。解得$x^*(2)=700-\frac{1}{3}z(2)$。代入$J_3$得$J_3^*[z(2)]=10,000-6z(2)+\frac{0.005}{3}z^2(2)$。

最后一步，将四个季度一起考虑，由基本方程(5.2--4)有：

$$J_4^*z[(1)]=\min_{x(1)}\{0.005x^2(1)+z(1)+J_3^*[z(2)]\}$$

由$z(1)=0$，$z(2)=z(1)+x(1)-S(1)=x(1)-600$，代入上式得$J_4^*[z(1)]=\min_{x(1)}\{0.005x^2(1)+10,000-6[x(1)-600]+\frac{0.005}{3}[x(1)-600]^2\}$。和前两步类似地有$\frac{d\{\ \}}{dx(1)}=0.01x(1)-6+\frac{0.005}{3}[x(1)-600]=\frac{0.04}{3}x(1)-8=0$。解得$x^*(1)=600$。代入$J_4$得$J_4^*[z(1)]=11,800$(元)。

最后，再由状态方程和上述$x^*(4)$、$x^*(3)$、$x^*(2)$得最优轨线和最优控制序列为：

$$z^*(1)=z(1)=0$$

$$x^*(1)=600$$

$$z^*(2)=z^*(1)+x^*(1)-600=0$$

$$x^*(2)=700-\frac{1}{3}z^*(2)=700$$

$$z^*(3)=z^*(2)+x^*(2)-700=0$$

$$x^*(3)=800-0.5z^*(3)=800$$

$$z^*(4)=z^*(3)+x^*(3)-500=300$$

$$x^*(4)=1200-z^*(4)=900$$

即第一季度生产600件，第二季度生产700件，第三季度生产800件（库存300件），第四季度生产900件。总费用为11,800元。

如果各季度均按订货量生产，即各季度均无库存，则：

$$z(1)=z(2)=z(3)=z(4)=z(5)=0$$

$$x(1)=690,\quad x(2)=700,$$

$$x(3)=500,\quad x(4)=1200$$

而总费用为 $J_4\sum_{k=1}^{4}0.005x^2(K)=12,700$元，这比上面求得的最优决策多用900元。

5_3 线性二次型最优控制问题

本节讨论离散的线性二次型问题。在现代控制理论中，这个问题占有重要的位置。一方面，它的结果比较好：应用动态规划方法得到的最优控制是状态变量的反馈形式，这在实际中易于实现，使用也比较方便。另一方面，在理论上也很重要：它是许多其他方法的基础，有许多控制问题可作为线性二次型问题来处理。这是一类特殊的多变量控制系统，即状态方程是线性的，而目标函数是二次的。它在经济学中被称为二次型福利函数。

1。线性二次型问题的提法

设有一线性系统$z(k+1)=A(k)z(k)+B(k)x(k)$，其目标函数为$J_N=Z'(N)Fz(N)+\sum_{k=0}^{N-1}[z'(k)Q(k)z(k)+x'(k)R(k)x(k)]$。其中：$z(k)$为n维状态变量；$x(k)$为m维输入控制变量；F、$Q(k)$、$R(k)$都是有相应维数的对称矩阵，Q、F为半正定，R是正定的（正定，半正定的概念在下面解释）。

问题是求最优控制序列$x^*(0),x^*(1),\cdots,X^*(N-1)$使$J_N$最小。

因为这一问题的状态方程是线性的，目标函数又是状态变量和控制变量的二次型函数（若令Q、R为单位矩阵，就一目了然了），因此称为线性二次型问题。

为什么要使目标函数取这样一种形式呢？因为我们所关心的是，通过政策控制变量来调节和改善经济系统的状态和响应。这个问题用状态变量方法来处理，可以看作是一个线性二次型问题。这是因为调节的目的是使偏离平衡位置的状态，尽量回到平衡位置上来，也就是说，使z尽量接近于零状态，即使经济系统的发展是稳定的。这就相当于使

以下目标函数为最小：

$$J = z'(N)\,Fz(N) + \sum_{k=0}^{N-1} z'(k)\,Q(k)z(k)$$

另一方面，我们不希望在控制的过程中管理成本过大，也就是说为了达到一定的控制目的，若成本耗费太大是不合算的。这样，在目标函数中再加上包含x的一项，取为$J_n = z'Fz + \sum_{k=0}^{N-1}[z'(k)Q(k)z(k) + x'(k)R(k)X(k)]$，并使$J_n$最小，就相当于使z(k)尽量接近于零，而控制x(k)又不过大。

下面解释Q、R、F的经济涵义。

在一个调节系统中，目的是要使输出从非零状态转移到零状态（即平衡态），这种转移从理论上讲当然越快越好。但是要使其越快，控制x就得越强。实际上，任何控制总是存在着经济因素的限制，不能任意大。同时，加强控制就意味着要提高管理成本、消耗能量和资金等，因此，还有一个节约的问题。我们希望控制是有界的（即不是任意大），而且耗费能够小些。控制x的各个分量x_i往往并非同等重要，有些控制作用应该加强，另一些则可弱些，这就需要对各个控制分量加相应的权数。不失一般性，自然可设加权矩阵R(k)为对称

$$R=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{mm}\end{pmatrix}$$

不但如此，R(k)还是正定的（对任何k)。所谓正定矩阵，是指$\det(\lambda_{11})>0$，$\det\begin{pmatrix}\lambda_{11} & 0\\ 0 & \lambda_{22}\end{pmatrix}>0$，…，$\det\begin{pmatrix}\lambda_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{mm}\end{pmatrix}>0$，即$\lambda_{ii}>0$对任给i。这有两方面的理由：第一，若矩阵R不正定，有些λ_{ii}就会等于甚至小于零，取这样的矩阵作加权矩阵就会出现“控制越强，越节省控制消耗的能量、资金”的矛盾；第二，在下面的计算中要用到矩阵R(k)的秩，如只要求R(k)半正定(即$\lambda_{ii}\geqslant 0, i=1,\cdots,m$)，就不能保证它有逆（矩阵）。当然，这两方面的理由是统一的。

单对控制X提出要求还不够，对系统的状态z也有要求。我们希望z(k)尽快地从非零状态转移到零状态，这就希望指标$\sum z'(k)Q(k)z(k)$越小越好。其中的加权矩阵Q(k)是对称阵，但只需是半正定的，因为状态的某些分量$z_i(k)$可能无关紧要，不必加以限制。

实际上，这些加权矩阵反映了经济决策者对于不同目标的重要程度的一种判断。

这样便可以通过调节Q(k)和R(k)的元素的大

小来调节对某个变量的要求。当强调状态z(k)尽量接近于零，而不惜花费较大的控制能量和成本时，可把 Q(k)的元素加大。当强调控制动作不能过大时，则可加大 R(k)的元素。如果在所有状态变量中，对某个变量$z_i(k)$有特别要求——尽量接近于零，则可把相应的q_{ii}加大。同样，如不希望$x_j(k)$（第j个控制分量）过大时，则可把相应的r_{jj}加大。适当调整Q(k)和 R(k)可使系统获得一个良好的动态响应：既可使接近于零的情况较好，得到较满意的轨线，又可使控制的成本不过大，实际上就是要在达到目标与为此实施控制而付出的代价间取得一种合理的协调。

在某些情况下，状态在终点时刻N的值很重要，为此可加上一项单独衡量状态终点值的指标$z'(N)Fz(N)$。其中，S是半正定常数对称矩阵，也是加权矩阵。

2。有限时间的调节器问题的解

为简单明了，先考虑时不变系统，即 A、B、Q、R都不依赖时间 k的情况。这时系统的状态方程为：

$$z(k+1) = Az(k) + Bx(k)$$

目标函数为：

$$J_N = z'(N)Fz(N) + \sum_{k=0}^{N-1}[z'(k)Qz(k) + z'(k)Rx(k)]$$

下面应用动态规划的基本方程导出线性二次型问题解的公式。

首先考虑一步的情况，这时初始条件是Z(N−1)，问题是求X*(N−1)，使$J_1[z(N-1), x(N-1)] = \{z'(N)Fz(N) + z'(N-1)Qz(N-1) + x'(N-1)RX(N-1)\}$达到最小，或写为$J_1^*[z(N-1)] = \min_{X(N-1)} \{z'(N)Fz(N) + z'(N-1)Qz(N-1) + x'(N-1)Rx(N-1)\}$。为讨论方便，引进$J_0^*[z(N)] = z'(N)V_0z(N)$，$V_0 = F$。这样，上式可写为：

$$J_1^*[z(N-1)] = \min_{X(N-1)} \{z'(N-1)Qz(N-1) + x'(N-1)Rx(N-1) + J_0^*[z(N)]\}$$

由状态方程，上式又可写为：

$$J^*[z(N-1)] \quad \min_{X(N-1)} \{z'(N-1)Qz(N-1) + x'(N-1)Rx(N-1) + [Az(N-1) + Bx(N-1)]' V_0[Az(N-1) + Bx(N-1)]\}$$

由数学分析可知，为使{ }中函数最小，必须 $\frac{\partial\{\ \}}{\partial x(N-1)}=0$。这里$x(N-1)$是一个 m 维向量，$\frac{\partial\{\ \}}{\partial x}$表示尖括号中的函数关于向量 x 的梯度，它是一个列向量。考虑到：

$$\frac{\partial}{\partial x}(x'Rx)=2Rx$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(C'x)=C(\text{为一个m维列向量})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x'C)=C$$

可算出：

$$\frac{\partial\{\ \}}{\partial x(N-1)}=2Rx(N-1)+2B'V_0Bx(N-1)+2B'V_0Az(N-1)$$

令上式等于 0，可解出：

$$x^*(N-1)=-[R+B'V_0B]^{-1}B'V_0Az(N-1)$$

或记为

$$x^*(N-1)=-k_1z(N-1),$$

$$k_1=[R+B'V_0B]^{-1}B'V_0A$$

将所求的最优控制$x^*(N-1)$代入J_1，得到：

$$J^*[z(N-1)]=z'(N-1)Qz(N-1)+z'(N-1)k_1'Rk_1z(N-1)$$

$$+ z'(N-1)[A - Bk_1]' V_0$$
$$X[A - Bk_1]z(N-1)$$

即：

$$J_1^*[z(N-1)] = z'(N-1)V_1 z(N-1)$$
$$V_1 = Q + k_1' R k_1 + [A - Bk_1]' V_0 [A - Bk_1]$$

应用数学归纳法可证明：对$L = 1, 2, \cdots, N$有：

$$x^*(N-1) = -k_1 z(N-1) \qquad (5.3-1)$$

其中 $k_L = [R + B' V_{L-1} B]^{-1} B' V_{L-1} A$ (5.3—2)

$$J_L^*[z(N-1)] = z'(N-L)V_L z(N-L) \qquad (5.3-3)$$

其中
$$\begin{cases} V_L = Q + k_L' R k_L + [A - Bk_L]' V_{L-1} \\ X[A - Bk_1] \\ V_0 - F \end{cases} \qquad (5.3-4)$$

将k_L代入V_L中，上式可化为：

$$V_L = Q + A' V_{L-1} A + A' V_{L-1} B[R + B' V_{L-1} B]^{-1} B' V_{L-1} A$$

或改写为：

$$\begin{cases} V_2 = Q + A' M_L A \\ M_L = V_{L-1} + V_{L-1} B[R + B' V_{L-1} B]^{-1} \times B' V_{L-1} \end{cases} \qquad (5.3—5)$$

由此，可递推地算出V_L，即由$V_0=F$算M_1，算V_1，算M_2，算V_2…，算出V_L就可由(5.3--2)算出k_1，又可由(5.3—1)算出最优控制$x^*(N-L)$。

为了计算简单，对计算过程中常遇到的量引进如下记号：

$$Z_1=Q+A'V_{L-1}A$$

$$Z_2=B'V_{L-1}A$$

$$Z_3=R+B'V_{L-1}B$$

这样，最优控制的计算可按如下的步骤进行：

(1)令$V_0=F$

(2)对$L=1$计算

$$Z_1=Q+A'V_{L-1}A,\quad Z_2=B'V_{L-1}A,$$

$$Z_3=R+B'V_{L-1}B$$

(3)计算 $k_L=Z_3^{-1}Z_2$

(4)计算 $V_L=Z_1-Z_2'Z_3^{-1}Z_2$；

(5)对$L=2$，…，N，重复(2)～(4)步

(6)计算 $x^*(k)=-k_{N-K}z(k)$，$k=0$，1，2，…，$N-1$

$$z(k+1)=Az(k)+Bx^*(k)$$

$$k=0,\ \cdots,\ N$$

(7)计算 $J^*_N[z(0)]=z'(0)V_Nz(0)$

由上述计算步骤和结果(6)可看出，所得到的最优控制$x^*(k)$是状态$z(k)$的反馈形式。矩阵k_{N-K}称为反馈增益矩阵。增益矩阵k_1与初始条件无关，只与原来的状态方程和目标函数的系数矩阵A、B、F、Q、R有关。这样，线性二次型问题中的矩阵k_L可事先算好。需要即时计算的只有$x^*(k)=-k_{N-K}z(k)$，这种计算量很小。也就是说，我们要求的最优控制$x^*(k)$是状态变量的线性组合，这在控制上比较容易实现。

将上面的推导归纳为如下定理：

定理1 设线性系统为$z(k+1)=Az(k)+Bx(k)$，$z(0)$给定，其目标函数为

$$J_N=z'(N)Fz(N)+\sum_{K=0}^{N-1}[z'(k)Qz(k)+x'(k)Rx(k)]$$

。其中：$z(k)$为n维状态向量；$x(k)$为m维控制向量；A和B分别为$n\times n$和$n\times m$常数矩阵；F为$n\times n$的对称半正定常数矩阵；Q为$n\times n$的对称半正定常数矩阵；R为$m\times m$的对称正定常数矩阵；$x(k)$无约束。

这样，最优控制序列为：

$$x^*(k)=-k_{N-R}z(k)\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$$

目标函数的极值为：

$$J^*_N = z'(0)V_N z(0)$$

最优轨线为：

$$z^*(k) = A^k z(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B x^*(i)$$

$$k = 0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$$

其中：k_{N-k}与V_N分别由(5.3—2)和(5.3—4)给定。

上面的计算公式中首先假设A、B、Q、R都是常数矩阵。当它们是时间k的函数时，记为A(k)，B(k)，Q(k)，R(k)。这时，上面的计算公式仍可用来计算最优控制，计算公式为：

(1)令$V_0 = F$

(2)对$L = 1$计算

$$Z_1(L) = Q(N-L) + A'(N-L)V_{L-1}A(N-L)$$

$$Z_2(L) = B'(N-L)V_{L-1}A(N-L)$$

$$Z_3(L) = R(N-L)B'(N-L)V_{L-1}B(N-L)$$

(3)计算 $k_L = Z_3^{-1}(L)Z_2(L)$

(4)计算 $V_L = Z_1(L) - Z'_2(L)Z_3^{-1}(L)Z_2(L)$

(5)对$L = 2, \cdots, N$，重复(2)～(4)步，

(6)计算$x^*(k)$

$$x^*(k) = -k_{N-k}z(k) \quad k = 0,\ 1,\ 2\ \cdots,\ N-1$$

（7）计算目标函数最优值 $J_N^*[z(0)]=z'(0)\times V_N z(0)$

上述问题的框图，如图5.2所示。

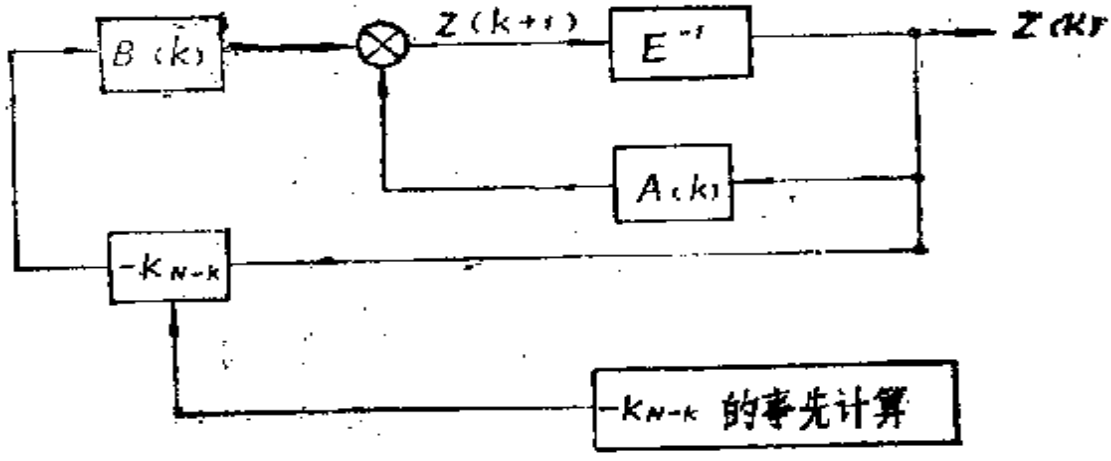


图5.2 线性二次型问题的最优控制求解

例 2 我们将第四章的例 6 所引入的模型重写如下（具体说明可参见例 6 ）：

$$\Delta y_t = a_1\Delta y_{t-1} + a_2\Delta y_{t-2} + a_3\Delta M_t$$

$$\Delta r_t = b_1\Delta y_t + b_2\Delta M_t$$

这个模型的状态空间表示如下（令 $t=k$ ）：

$$z(k+1) = Az(k) + bx(k)$$

其中：

$$z(k) = \begin{pmatrix} \Delta y_k \\ \Delta y_{k-1} \end{pmatrix},\quad x(k) = \Delta M_k,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

现在，我们的目标是要使利息率的变化 Δr_1 在三个季度内（从第 0 季度到第 3 个季度）尽可能的小。从 Δr_1 的表达式不难看出：如果 Δy_1 与 ΔM_1 很小，那末 Δr_1 也将很小。为此，我们引进如下的目标函数和初始状态：

$$J_3 = \sum_{k=0}^{2} [Z(k)'z(k) + 0.2x^2(k)]$$

$z(0) = z_0$ 为已知

现在要求的是能使 J_3 取最小值 J_3^* 的最优控制 $x^*(k)(k=0, 1, 2, 3)$。

为计算方便起见，给 a_1，a_2，a_3 赋值如下：

$$a_1 = 0.5,\ a_2 = 0.3,\ a_3 = 0.1$$

解：利用上面导出的计算步骤解这个问题。首先，我们有：

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = b = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ R = 0.2,\quad N = 3$$

（1）$V_0 = F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

（2）对 $L = 1$，计算

$$Z_1 = Q + A' V_0 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 = B' V_0 A = (0,\ 0)$$

$$Z_3 = R + B' V_0 B = R = 0.2$$

(3)计算

$$k_1 = Z_3^{-1} Z_2 = (0,\ 0)$$

(4)计算

$$V_1 = Z_1 - Z_2' Z_3^{-1} Z_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5)对L=2，3进行计算：

①对L=2，有

$$Z_1 = Q + A' V_1 A = \begin{pmatrix} 2.25 & 0.15 \\ 0.15 & 1.09 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 = B' V_1 A = (0.05,\ 0.03)$$

$$Z_3 = R + B' V_1 B = 0.21$$

$$k_2 = Z_3^{-1} Z_2 = (0.2381,\ 0.1429)$$

$$V_2 = Z_1 - Z'_2 Z_3^{-1} Z_2$$

$$\doteq \begin{pmatrix} 2.2381, & 0.1429 \\ 0.1429, & 1.0857 \end{pmatrix}$$

②对L=3，计算

$$Z_1 = Q + A' V_2 A \doteq \begin{pmatrix} 2.7882 & 0.3786 \\ 0.3786 & 1.2014 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 = B' V_2 A \doteq (0.1262,\ 0.0671)$$

$$Z_3 = R + B' V_2 B \doteq 0.2224$$

$$k_3 = Z_3^{-1} Z_2 \doteq (0.5674,\ 0.3017)$$

$$V_3 = Z_1 - Z_2' Z_3^{-1} Z_2$$

$$\doteq \begin{pmatrix} 2.7166 & 0.3405 \\ 0.3405 & 1.1812 \end{pmatrix}$$

(6) $x^*(0) = -k_{N-0} Z(0) = -k_3 Z_0$

$$= -(0.5674,\ 0.3017) Z_0$$

$$Z^*(1) = AZ(0) + Bx^*(0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.4433 & 0.2698 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z_0$$

$$x^*(1) = -k_2 z^*(1)$$

$$= -(0.2484,\ 0.0642) z_0$$

$$z^*(2) = Az^*(1) + Bx^*(1)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.4969, & 0.1282 \\ 0.4433, & 0.2698 \end{pmatrix} z_0$$

$$x^*(2) = -k_1 z^*(2) = 0$$

$$z^*(3) = Az^*(2) + Bx^*(2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.3814 & 0.1450 \\ 0.4969 & 0.1282 \end{pmatrix} z_3$$

(7) 计算

$$J_3^* = z'_0 V_3 z_0$$

$$= z_0' \begin{pmatrix} 2.7166 & 0.3405 \\ 0.3405 & 1.1812 \end{pmatrix} z_0$$

这样我们就求出了：

最优控制：$x^*(0)$，$x^*(1)$，$x^*(2)$

最优轨线：$z^*(1)$，$z^*(2)$，$z^*(3)$

目标函数的最小值：$J_3^* = z'_3 V_3 z_0$

3．无限时间水平的调节器问题

前面我们讨论了线性时不变离散系统。从计算得到的结果可以看出，尽管A、B、Q、R都是不依赖于时间k的常数矩阵，但反馈增益矩阵k_1还是随时间的变化而变化（这从5.3—2中分析不难看出）。对于时不变系统，我们希望得到不随时间变化的增益矩阵（称为非时变控制器）。下面将指出，当步数N很大时，可近似地认为是$N\to\infty$的情况，这时导出的最优控制仍是$x(k) = -kz(k)$的形式，只是这时k是常数矩阵，不再随时间变化，因此在应用时更为方便。

设时不变系统为：

$$z(k+1) = Az(k) + Bx(k)$$

目标函数为：

$$J = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \left[z'(k)Qz(k) + x'(k)Rx(k) \right]$$

其中：Q为半正定对称矩阵，R为正定对称矩阵。由于$N\to\infty$，所以对终端状态没有要求。

以$J^*(z)$表示初始值为z时的目标函数J的最小值。

可以证明　如果$\langle A|B\rangle$为完全可控对，则前面所述的V_L收敛于一个常数矩阵，记为V。下面简要说明证明的思路：因为$\langle A|B\rangle$是可控对，所以对任一状态z(k)，都至少存在着一个控制序列x(k)，x(k+1)，…x(k+n−1)，使得由这个控制序列的作用而导致z(k+n)收敛于0。而x(k)又是我们可以加以调整的，这样在目标函数中，没有一项会是N的函数（即在N大到一定程度后，〔　〕号中的任一项都与N无关了），由此可见只要(A|B)是可控对，就可保证J是有限的，即可找到M>0，使得$J=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}[z'(k)Qz(k)+x'(k)Rx(k)]<M$。而J又是单调上升的，所以J→$J^*$（即J有极限），当N→∞时。而$J_N^*$又可表为$z'(0)V_Nz(0)$，所以可推出$V_N\to V$，当N→∞时。需要说明的是$\langle A|B\rangle$为可控对只是保证$J^*$取有限值的充分条件。而保证$J^*$取有限值的充分必要条件是不可控状态都是大范围渐近稳定的，这也是不难理解的。

令　$J^*(z)=z'Vz$，V是对称矩阵，则由最优性原理给出：

$$J^*[Z(k)]=\min_{x(k)}\{z'(k)Qz(k)+x'(k)Rx(k)$$

$$+J^*[z(k+1)]\}$$

即：

$$z'(k)Vz(k)=\min_{x(k)}\{z'(k)Qz(k)+x'(k)Rx(k)+z'(k+1)V z(k+1)\}$$

由状态方程得到：

$$z'(k)Vz(k)=\min_{x(k)}\{z'(k)Qz(k)+x'(k)Rx(k)+[Az(k)+Bx(k)]'V[Az(k)+Bx(k)]\}$$

这与前面的推导完全类似，以上式{　　}中的多项式对x求偏导，由$\frac{\partial\{\quad\}}{\partial x}=0$，导出

$$2Rx(k)+2B'VBx(k)+2B'VAz(k)=0,$$

从而解出：

$$x^*(k)=-[R+B'VB]^{-1}B'VAz(k) \qquad (5.3-6)$$

或写成：

$$x^*(k)=-kz(k) \qquad (5.3-7)$$

其中，$k=[R+B'VB]^{-1}B'VA$ (5.3—8)

使用与(5.3-2)中推导V_L的方程完全相同的步骤可推出关于V的如下的方程：

$$V = Q + A'VA - A'VB[R + B'VB]^{-1}B'VA \qquad (5.3\text{—}9)$$

这是一个非线性代数方程组，当A、B、Q、R给定时，由它可事先算出V，从而可事先算出反馈增益矩阵k。这样，即时控制只要完成：

$$x^*(k) = -kz(k)$$

可见，最优控制只是状态变量的反馈形式，反馈增益矩阵k是常数矩阵。如果所有状态都可测量，并且都可用来进行反馈，则根据上式计算最优控制$x^*(k)$的即时运算量很小。

关于V的计算需解非线性代数方程组（5.3—9），求解时需适当选取V的初值。我们常用(5.3-2)中推出的迭代公式(5.3—5)：

$$V_L = Q + A'M_LA$$

$$M_L = V_{L-1} - V_{L-1}B[R + B'V_{L-1}B]^{-1}B'V_{L-1}$$

从$V_0 = 0$开始进行迭代，直到相邻两次算出的V_l与V_{l-1}之差的绝对值小于某个已给的小的正数时为止。这时，我们就认为它已收敛到稳定值V。然后，再算k和最优控制$x^*(k)$。

有时为了简单也可凭经验取一个迭代次数，例如取迭代次数为20次或30次，一般也可满足要求。

如将求出的控制$x^*(k) = -kz(k)$代入原状态方程，就得到闭环系统：

$$z(k+1) = Az(k) + Bx(k) = Az(k) + B(-k)z(k)$$
$$= [A - Bk]z(k)$$

如果Q可以写成$Q = CC'$，且$\langle C | A \rangle$是完全可观对，则可以证明这一闭环系统是渐近稳定的。

下面讲证明的思路：因为已知目标函数$J \to J^*$（当$N \to \infty$时），J^*为有限值。而$Q = CC'$，且$\langle C|A \rangle$是完全可观的。这就是说，所有的轨线都将在目标函数中的$z'(k)Qz(k)$项上体现出来，任一潜在的不稳定的轨线将可通过应用反馈控制使其稳定。否则，仅有可控性也是徒劳的，因为若潜在的不稳定轨线不反映在目标函数中，则我们虽有足够的控制能力，但由于有些状态无法观测，我们不能知道某些状态是什么情况，也就无法知道应该实现何种具体的控制。

我们将上述分析归纳成下述定理。

定理 2 设时不变系统为：

$z(k+1) = Az(k) + Bx(k)$　　$z(0) = z_0$给定

目标函数为：

$$J = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} [z'(k)Qz(k) + x'(k)Rx(k)]$$

其中：z(k)和x(k)分别为n维状态向量和 m维控制向量，A、B分别为n×n和n×m维的常数矩阵，Q为n×n的半正定对称常数矩阵，R为m×m的正定对称常数矩阵，控制向量x(k)无约束。

当〈A|B〉可控，且仅当〈C|A〉可观测时（其中C是任一个使$CC'=Q$成立的矩阵）有下列结果：

1.使上述目标函数达到最小的最佳控制序列，可用下列线性反馈表示：

$$X^*(k) = -[R+B'VB]^{-1}B'VAz(k)$$
$$= -kz(k)$$

其中：V由(5.3—9)给定。

2.这时闭环系统 $z(k+1)=[A-Bk]z(k)$ 是渐近稳定的。

3.目标函数的极值为：

$$J^*(z_0)=z_0'Vz_0$$

注意，〈A|B〉是可控对的条件，可减弱为：不可控状态都是渐近稳定的。

这个定理也可称为最优反馈准则定理。关于本节中方法的应用，可见5.4。

4.输出调节器问题

设被控系统为：

$$z(k+1)=Az(k)+Bx(k)$$
$$y(k)=Cz(k) \qquad (5.3-10)$$

其中：$y(k)$是L维输出向量，C是$L\times n$维常数矩阵。

目标函数为：

$$J(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\,y'(k)y(k)+x'(k)Rx(k)\,\right] \qquad (5.3-11)$$

求$x^*(k)$使$J(x)$最小。这样的问题称为输出调节器问题。其涵义是选择$x^*(k)$，使$y(k)$尽量接近于零，而控制成本又不过大。

由于(5.3—11)可写为：

$$J(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\,y'(k)y(k)+x'(k)Rx(k)\,\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\,z'(k)Qz(k)+x'(k)Rx(k)\,\right]$$

其中$Q=CC'$，因此输出调节器问题可看为是状态调节器的特殊情况。对此，上述最佳反馈准则定理也适用。其中，Q为半正定的假定可用$(C|A)$可观测代替（这时$(C|A)$可观测是保证Q为半正定的充分条件）。

5.带有观测器的最优调节

前面讨论的调节器都是用状态变量进行反馈

的。这在实用中是会遇到困难的。因为对于一个实际经济系统，所有的状态变量一般都难以直接观测到，通常直接能观测的仅仅是系统的输出。为了使前面的讨论能付诸应用，还必须解决如何获得状态信息的问题。这个问题可通过两个途径来解决：一是利用卡尔曼滤波器；二是建立状态观测器。这里仅介绍观测器的方法。

建立观测器的方法是通过构造一个观测器，利用系统的输出y和输入x的信息去估计状态变量z，然后再利用状态变量的估计值去进行反馈，实现最优调节。如图5.3所示。

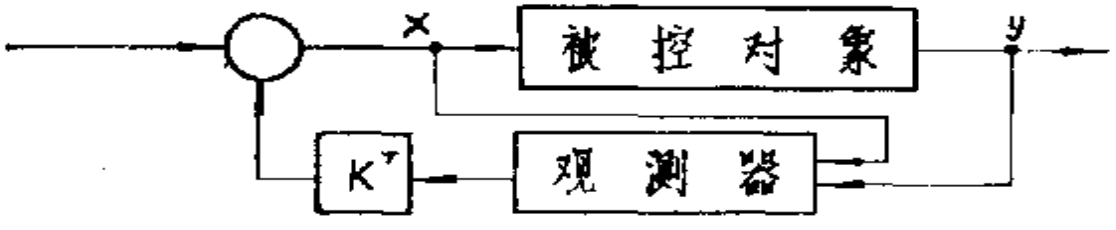


图5.3　带有观测器的反馈系统

构造一个观测器，就是多建立一个渐近稳定的动态系统，使得这个系统的状态变量u能够趋向于原系统的状态变量z，也就是能够用观测器模拟原系统的状态变量z，而观测器系统的输入是原系统的输出y和输入x。

设所考虑的原系统为：

$$\begin{cases} z(k+1) = Az(k) + Bx(k) \\ y(k) = Cz(k) \end{cases} \qquad (5.3—12)$$

对系统(5.3—12)构造如下的系统

$$u(k+1) = (A + GC)u(k) + Bx(k) - Gy(k) \qquad (5.3—13)$$

其中，G是我们选择的$n \times L$阶矩阵，以使得(5.3—13)是渐近稳定的（即$A+GC$的特征值的绝对值都小于1）。

下面证明当$k \to \infty$时，$u(k) \to z(k)$。

将(5.3—12)中第一式减去(5.3—13)得到：

$$\begin{aligned} & z(k+1) - u(k+1) \\ &= A[z(k) - u(k)] + GC[z(k) - u(k)] \\ &= (A + GC)[z(k) - u(k)] \end{aligned} \qquad (5.3—14)$$

由于$(A+GC)$的特征值的绝对值都小于1，所以(5.3—14)是渐近稳定的，也即$\lim_{k\to\infty}[z(k) - u(k)] = 0$。当$k \to \infty$时，有$u(k) \to z(k)$。因此，$u(k)$可以作为$z(k)$的估计值。我们这样构造出的系统(5.3—13)确实是(5.3—12)的一个观测器。

下面讨论将状态观测器应用于最优调节器上的情况。

由5.3.2的讨论，可知系统(5.3—12)的最优调

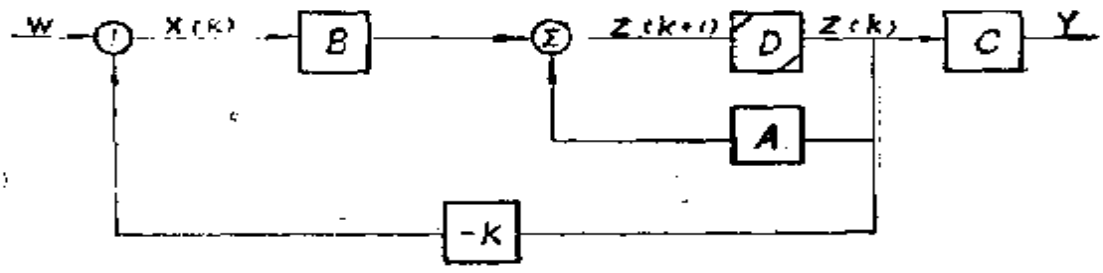


图5.4　最优调节控制系统的框图

节闭环系统的框图的一般形式如图5.4。

图中W是系统的外生输入（即外生变量——系统本身所不能控制的变量）。闭环系统的状态方程为：

$$\begin{aligned} z(k+1) &= Az(k) + Bx(k) \\ y(k) &= Cz(k) \\ x(k) &= -kz(k) + w(k) \end{aligned} \qquad (5.3\text{—}14)$$

即：

$$\begin{aligned} z(k+1) &= (A - Bk)z(k) + Bw(k) \qquad (5.3\text{—}15) \\ y(k) &= Cz(k) \end{aligned}$$

利用状态观测器的输出u去代替z进行反馈，这时，增广的闭环控制系统的状态方程为：

$$\begin{aligned} z(k+1) &= Az(k) + Bx(k) \\ y(k) &= Cz(k) \\ u(k+1) &= (A + GC)u(k) + Bx(k) \\ &\quad - Gy(k) \end{aligned} \qquad (5.3\text{—}16)$$

$$x(k) = -kz(k) + w(k)$$

将其中第四式代入第一式得：

$$z(k+1) = (A - Bk)z(k) + Bk[z(k) - u(k)] + Bw(k)$$

由(5.3—16)前三式可得（即第一式减去第三式，再将第二式代入之）：

$$[z(k+1) - u(k+1)] = (A + GC)[z(k) - u(k)]$$

由此得到增广闭环系统的状态方程的另一形式为：

$$\begin{pmatrix} z(k+1) \\ z(k+1) - u(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - Bk & Bk \\ 0 & A + GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(k) \\ z(k) - u(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} w(k)$$

$$y(k) = (C, 0) \begin{pmatrix} z(k) \\ z(k) - (ku) \end{pmatrix} \tag{5.3—17}$$

如果〈C|A〉是可观测的，则可证明观测器一定存在（这是容易理解的，因为有了可观性就可确定系统的状态）。因此，若系统〈C，A，B〉可控又可观，就可以通过构造观测器的办法，来实现最优调节。

5_4 总结

现在先来看一个例子，我们可以用它把上述各章、节的知识融汇起来。这个例子是在3.5中引入的两部门增长模型，这里仅研究已经线性化的系统，它的状态空间表示是 $z_{t+1} = Az_t + bx_t$。其中，$z_t = \begin{pmatrix} z_t^1 \\ z_t^2 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-a} \end{pmatrix}$。

引入下述目标函数：

$$J = \lim_{N\to\infty} \sum_{t=0}^{N} \{ z', Qz_t + ax_t^2 \}$$

为什么引入这样一个二次型的目标函数呢？因为 k_*^1，k_*^2，g_* 分别是非政府部门的人均固定资产占有量、政府部门的人均固定资产占有量和政府开支的均衡值(都是常数)。这些均衡值可以是事先计划好了的。我们当然希望在若干个季度内 k_t^1、k_t^2 和 g_t 这些实际数值与计划数值 k_*^1、k_*^2、g_* 不要偏离得太大。由于 $Z_t^1 = k_t^1 - k_*^1$，$Z_t^2 = k_t^2 - k_*^2$，$X_t = g_t - g_*$，如果 $k_t^1 = k_*^1$，$k_t^2 = k_*^2$，$g_t = g_*$，那末就有 $z_t = \begin{pmatrix} z_t^1 \\ z_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$x_t = 0$，这样 $J^* = 0$。这意

味着使k_1、k_2尽量靠近计划指标（均衡值），又不使控制g_1（政府支出）与计划开支偏离太大。因此，引入这样的目标函数，并使其取最小值，显然反映了我们的要求。下面我们用前述的方法来分析这个模型。

可控性检验：

该系统的可控性矩阵为：

$$(b,\ Ab)=\begin{pmatrix}0 & a_{12}e^{-n}\\ e^{-n} & a_{22}e^{-n}\end{pmatrix}=e^{-n}\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ 1 & a_{22}\end{pmatrix}$$

由于$a_{12}\neq 0$，(b,Ab)的秩等于2，这样系统就具有可控性。

可观性检验：

情况1　首先考虑$Q=\begin{pmatrix}L_1^2 & 0\\ 0 & L_2^2\end{pmatrix}$及$L_1,L_2>0$的情况。选取Q为这种形式时，观测矩阵$C=\begin{pmatrix}L_1 & 0\\ 0 & L_2\end{pmatrix}$，这意味着我们的目标不仅是使$k_1$尽量靠近$k_1^*$，而且也要使$k_2$尽量靠近$k_2^*$。这时输出方程为：

$$y_1=Cz_1=\begin{pmatrix}L_1 & 0\\ L & l_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1^1\\ z_1^2\end{pmatrix}$$

易见，C的秩等于2，这时可观测条件显然满足。

情况2　设$L_1=L>0,L_2=0$，这时$Q=C'C=$

$\begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (L, 0) = \begin{pmatrix} L^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，这意味着我们的目标仅仅是使$k_t^1$尽量靠近$k_*^1$（如我们希望非政府部门的人均固定资产规模保持不变），而对k_t^2是否靠近k_*^2并不关心，因为$k_t^1 - k_*^2$根本没有出现在目标函数中。这时观测方程为：

$$y_t = CZ_t = (1, \ 0)\begin{pmatrix} z_t^1 \\ z_t^2 \end{pmatrix} = Lz_t^1$$

可观性矩阵为：

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ la_{11} & la_{12} \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

由于$a_{12} \neq 0$，显然可观性条件是满足的。

情况 3　设$C = (1, L)$，则$Q = \begin{pmatrix} 1 & L \\ L & L^2 \end{pmatrix}$，这时$k_t^1 - k_*^1$，$k_t^2 - k_*^2$都包含在目标函数中。观测方程为：

$$y_t = Cz_t = (1, \ L)\overbrace{\begin{matrix} z_t^1 \\ z_t^2 \end{matrix}} = z_t^1 + Lz_t^1$$

可观性矩阵为（并设$L = 1$）：

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ a_{11}, & a_{12} + La_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & L \\ a_{11}, & a_{12} + a_{22} \end{pmatrix}$$

由于 $a_{11}=a_{12}+a_{22}$（见3.5），所以 当$L=1$时，系统是不可观的。

最优控制的性质：

情况 1　由于系统具有可控性，可观性条件又得到满足，因此最优控制决策存在，并且是渐近稳定的。

情况 2　讨论类似于情况 1 。

情况 3　设$L=1$，这时虽然可控性条件满足，但是可观性条件不满足。为了看清这意味着什么，假设：

$$a_{11}=1,\ a_{12}=-0.1,\ a_{22}=1.1,$$
$$a=e^{-2a}$$

由于$L=1$，所以：

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

这样，非线性代数方程组(5.3—9)便可解出：

$$V=Q+A'VA-A'VB\,[\,R+B'VB\,]^{-1}B'VA$$

因为$R=a=e^{-2a}$只是一个常数，所以$[\,R+B'VB\,]^{-1}$也是一个数，这样便有：

$$V-A'VA+A'VBB'VA\times\frac{1}{[\,R+B'VB\,]}=Q$$

由于A、B＝b、R、Q都是已知的，便可求出矩阵V。

由于计算相当繁琐，下面仅把结果给出：

$$V=\begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.6185 & 1.618\\ 1.618 & 1.6179\end{pmatrix}$$

易见，这个矩阵是上述代数方程组的一个正定对称解（因为$V_{21}=V_{12}$，$V_{11}>0$、$V_{11}\times V_{22}-V_{12}^2>0$）。

由此可得到反馈增益矩阵：

$$k=[R+B'VB]^{-1}B'VA$$

$$=(0.6205,\ 0.6204)$$

从而得到闭环系统：

$$z_{t+1}=[A-BK]z_t$$

现在看一看这个最优反馈闭环系统是否稳定：

$$A-Bk=\begin{pmatrix}1 & -0.1\\ -0.618 & 0.482\end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-(A-Bk)|=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0.1\\ 0.618 & \lambda-0.482\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1=1.1,\ \lambda_2=0.382$$

显然，这个闭环系统是不稳定的。

从上述分析可见，当可控性条件满足，而可观性条件不满足时——即情况3，最优控制是不稳定

的。尽管这时$k_t^1 - k_*^1$，$k_t^2 - k_*^2$都出现在目标函数中。

从这个例子不难看出，对于经济系统的任何合理的模型而言，可控性条件是正常的，而且容易得到满足；但对可观测条件是否满足，就要十分小心。由于Q的不正确选取，可导致〈A|C〉不是一个可观对，这时即便所有重要的变量都出现在目标函数里，也无济于事。在动态经济模型中，矩阵Q的错误选取更易在高维系统的建模中出现，这常常导致不稳定的控制决策。

现在，我们可以把前述各章的知识加以简单的总结，以便看清不同的概念和方法之间的联系。

可以看出，可控性是稳定性决策的充分条件；而可控性、可观性是系统的最优稳定性决策的充分条件，同时又是实现最优决策（或最优控制）的条件。

从可控性和稳定性及稳定性决策的定义，不难看出可控性是稳定性决策的充分条件的直观意义：因为系统的状态完全可控，那末当然可使其状态趋向平衡状态。这里之所以不需要观测，是因为矩阵A反映了控制对象的结构，因此可以事先计算，将

其特征值加以控制。

同样，可控性、可观性是系统的最优稳定性决策的充分条件的直观涵义也是不难理解的：因为有了可控性，当然可以使控制对象的状态任意改变（包括使其稳定），但是要想实现最优稳定性控制，必须随时知道有关系统状态的所有信息，才能适时调节它的运动。这时仅靠事先所能够了解的A的结构就不够了，必须随时观察系统的运行状态。这就自然要求系统是可观的。否则，即使系统是可控的，但由于不能随时了解有关系统运行状态的信息，就使我们的每一步具体控制丧失了方向或不能准确达到所要求的程度，当然也就谈不上“最优”二字了。如果没有可观性，而只有可控性，那末我们只能降低控制的要求，以达到稳定性决策为满足。

第五章实际上是在最优控制的问题上把第二章至第四章中所提出的基本概念：可控性、可观性、稳定性以及反馈和控制加以综合，进而给出它们相互间的关系，并从理论上回答了我们所关心的根本问题：能否控制以及如何控制（或调节）经济系统，使其具有我们所希望的特性。

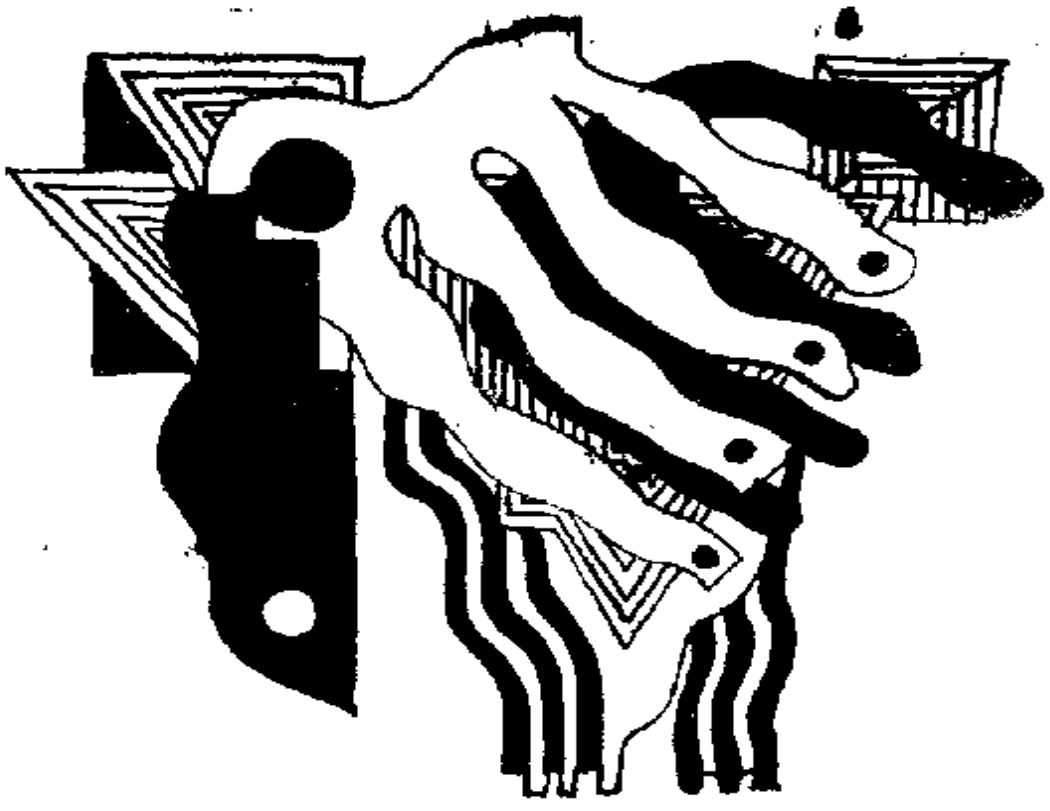
动态经济的现代控制理论，其最核心的问题或最重要的内容，就在于如何对经济系统实现最优控制。无论稳定性的条件是什么，也无论可控性和可观性的条件是什么，我们都是在以下三方面的前提之下讨论经济系统的：

1.经济系统的结构基本不变，即状态变量数和状态变量之间的关系不变；

2.经济系统处于平衡态或接近平衡区域；

3.控制和调节的目标预先已经确定，并在整个过程中保持不变。

然而，在实际上，社会经济活动是要超出这三方面的限制的。正因为如此，社会经济才不断地发展，特别是有质上的发展。研究有关这方面的内容已超出现代控制理论的范围，需要引入新的理论和方法，其中值得重视的是耗散结构理论。以下三章将予以介绍。



第六章

耗散结构与经济系统

6_1 导言：确定性、随机性和不确定性

从这一章开始，我们要转入一个新的领域，这将涉及到经济系统的一些重要性质：确定性、随机性和不确定性。为此，我们首先把相应的几种类型的经济系统概述如下。

第一种类型的经济系统是确定性的。在前几章里，我们主要分析了确定性的线性离散经济系统及其控制问题。这种系统可由图 6.1 形象地表示出来。对于这种系统来说，在给定了初始状态Z_0和政策控制序列（即输入）x_0，$x_1 \cdots x_k$之后，系统从初态z_0到终态z_k的转移轨迹是唯一确定的，也就

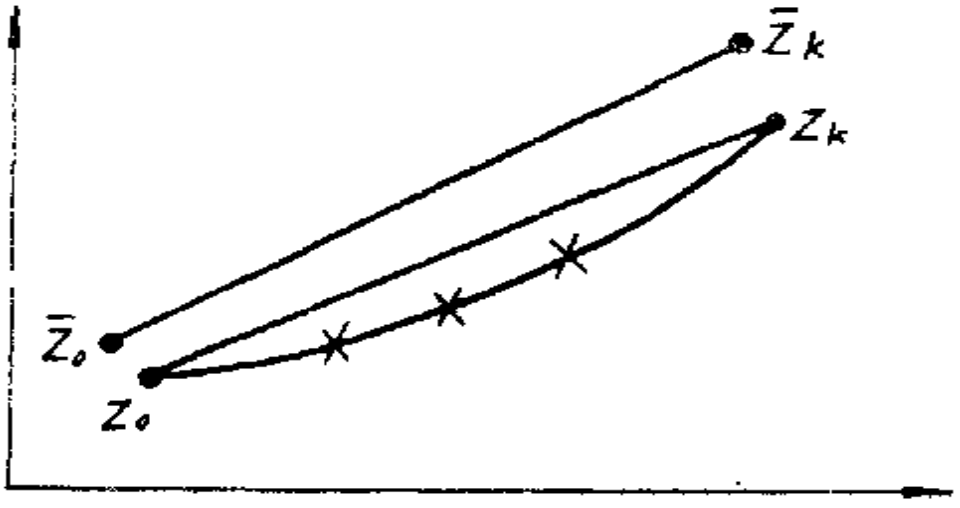


图6.1　确定性的经济系统

是说不会有另一条不同的状态转移轨迹与之并存（如图中打×的轨迹）。不同的初态和不同的政策序列对应着不同的转移轨迹。

第二种类型的经济系统是随机性的。本书对这种系统没有涉及。为了进行比较，下面对这种系统稍加介绍。

首先，我们看一个大家熟悉的例子。投掷一枚均质的硬币，要问硬币落地后的结果是正面朝上还是反面朝上。就一次具体的投掷而言，谁也无法指出是哪面朝上。但是，当投掷次数非常多时，我们可以很有把握地说，在总的投掷次数中，正面朝上与反面朝上的次数约各占二分之一。

下面我们来看一个简单的系统，其状态方程如

下：

$$z_k = 1 \cdot z_{k-1} + 2x_{k-1} + \varepsilon_{k-1}$$

这是一个标量方程，它与我们在前几章所看到的状态方程有很多相似之处，例如矩阵A、B在这里分别为1和2这两个数，所不同的是多了ε_{k-1}这样一项。

现在我们给定初态$z_0=4$和控制序列$x_0=x_1=\cdots=x_{k-1}=0$，而ε_{k-1}的值是根据这样一种法则确定的：投掷一次硬币，若正面朝上，则$\varepsilon_k=1$；若反面朝上，则$\varepsilon_k=0$。如果接连几次掷硬币的结果是反、反、正、正、正、反、正、反、反、正，那末，所得到的状态转移序列是：$z_0=4$，$z_1=4$，$z_2=4$，$z_3=5$，$z_4=6$，$z_5=7$，$z_6=7$，$z_7=8$，$z_8=8$，$z_9=8$，$z_{10}=9$。若硬币的各次朝上面为正、反、正、正、反、反、反、正、反、反，则状态转移序列是：$z_0=4$，$\bar{z}_1=5$，$\bar{z}_2=5$，$\bar{z}_3=6$，$\bar{z}_4=7$，$\bar{z}_5=7$，$\bar{z}_6=7$，$\bar{z}_7=7$，$\bar{z}_8=8$，$\bar{z}_9=8$，$\bar{z}_{10}=8$。显然，在这种情况下仅仅给出初始状态和控制序列，并不足以定出唯一的状态转移序列，而只能定出一批状态转移序列。

在此例中的状态转移情况还可用矩阵的形式表示如下（表6.1,a）。

表6.1　　转移概率矩阵

↓	… 3	4	5	6 …
⋮	……	…	…	……
3	… $\frac{1}{2}$	0	0	0 …
4	… $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0 …
5	… 0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0 …
6	… 0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ …
⋮				

(a)

	… 3	4	5	6	7	8 …
⋮						
3	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0 …
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0 …
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0 …
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
7	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
8	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
9	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
10	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
⋮						

(b)

在表6·1中，箭头“↓”表示从某一状态向另一状态转移的可能性(或机会)大小，如由状态值为3转移到状态值为3的机会为$\frac{1}{2}$，转移到状态值为4的机会也是$\frac{1}{2}$，而转向状态值为5的可能性是0，等

等。我们称中间充满 0 和$\frac{1}{2}$这样数字的表为转移概率矩阵。

如果我们设ε_{k-1}的值是由这样的法则确定的：投掷正六面体（见图6.2），标号为 0 的面朝上，则ε_k的值为 0；标号为 1 的面朝上，则ε_k的值为 1；…，标号为5的面朝上，则ε_k的值为 5。那么状态转移情况如表6.2,b。很明显，对于这种系统而言，每一给定状态（控制序列也给定）可能变成好些个状态。我们称这种系统为随机性系统。

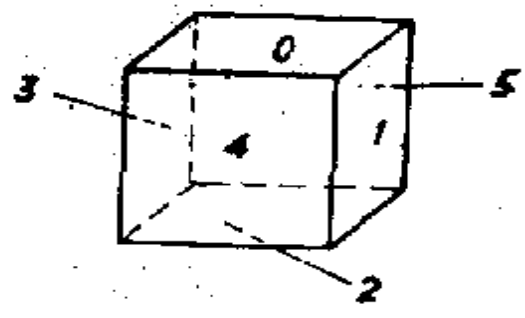


图6.2

这种随机性系统有一个基本的特点：尽管每一状态在下一步可能变成很多个状态，因而状态转移是随机的（或称为“不确定的”），但是从任一状态向下一步的各个状态转移的概率却是唯一确定的。例如，在表6.1（b）中，从状态值为 3 向状态值为 3、4、5、6、7、8 的转移概率均为$\frac{1}{6}$。换言之，我们可将这种系统称为统计确定性系统。

必须指出，这里所说的概率有两层涵义：第一，事件的发生要有频率(即事件是频繁发生的)，第二，频率稳定。频率指的是某一事件发生的次数与各种事件发生的总次数之比。如掷硬币，正面朝上是一个事件，反面朝上又是一个事件。频率稳定是指上述比例随着次数增多趋于某一定值。如正面朝上的比例是$\frac{1}{2}$。

上述的ε_{k-1}这一项是随机干扰项，它是我们不能控制的外生变量（或向量），且其取值是随机的。例如，年成的好坏对农业经济系统的产出影响很大，即使投入的要素量一定，年成不同，产出也不相同。年成的好坏虽“不确定”，但是通过长期的统计资料，我们却可发现它具有统计规律性（或统计确定性），例如在每10年中，灾年和丰年各为2年（即灾年和丰年的概率各为$\frac{1}{5}$），平年占6年（即概率为$\frac{3}{5}$）。如我们将其赋值为：灾年时$\varepsilon_{k-1}=-1$，概率为$\frac{1}{5}$；丰年时$\varepsilon_{k-1}=1$，概率为$\frac{1}{5}$；平年时$\varepsilon_{k-1}=0$，概率为$\frac{3}{5}$。并假设控制序列（例如某种要素的投入量）为$x_0=x_1=\cdots=x_{k-1}=1$，初态$z_0=4$，请读者自行做出该农业经济系统类似于表6.1的转移概率矩阵。

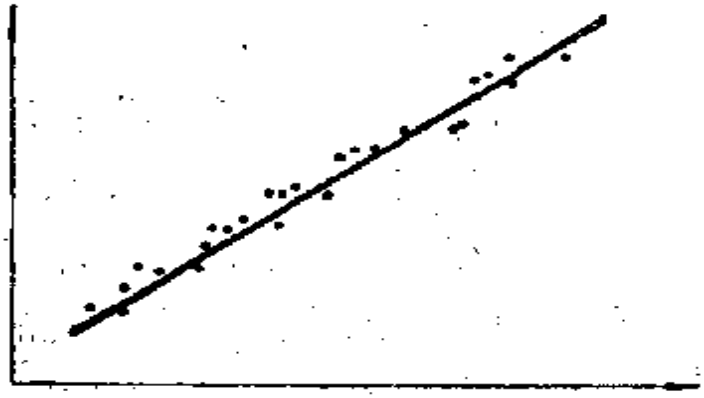


图6.3 随机性的经济系统

随机性的经济系统可由图6.3形象地表示出来。对于这种类型的经济系统，也有一套成熟的调节和控制办法，即随机控制理论。它是确定性系统控制理论的拓广。从原则上讲，就是在原有的理论基础上加入概率论的处理方法。这里不拟详细说明。可以说，确定性系统是随机性系统的特殊情况，如果我们设$e_{k-1}=a$或设$e_{k-1}=bx_{k-1}$，就不难看出这一点了。

第三种类型的经济系统称为不确定性（或称突现性）的。对于这种系统来说，有完全偶发的因素影响着系统状态的变化，这种偶发的因素并不具备统计的确定性。因此，相对于确定性系统或随机性系统来说，这种系统具有真正的不确定性，无法用确定性控制理论或随机控制理论来把握。例如，早期汽车工厂的投资。那时并没有对于这个产品的需

求，因为还不存在这种产品。因此一个工厂要生产这种产品，就面临着这样一种局面：不仅畅销、滞销这些结果难以确定，而且这些结果也无概率可言（因为根本就不存在频率）。这种不确定性在自然界、经济和社会的发展中是颇为常见的，是系统发育过程中一种极为深刻的性质。在以后的各章、节中，我们将引入新的方法来着重分析这种系统。

对于社会经济系统来说，往往同时具有上述三种性质。例如在一个企业中，如果原有的工艺过程不变，那末，投入一定量的劳动力、原材料、资金，生产出的产品量是确定的；而销售量则往往是随机的，因为影响销售量的需求量是该企业不能控制的，它受很多随机因素的影响（但这种因素具有统计的确定性）。假设这个企业要投产一种新产品，那末它将面临着一种不确定性。

严格意义上的现代控制理论，对于确定性和随机性经济系统的控制和调节，已有了一些比较成熟的办法，但对于具有不确定性的经济系统的控制和调节，特别是当经济系统的不确定性占有压倒优势时，现代控制理论的方法就有很大的局限性。借用一个哲学术语来说，现代控制理论所描述的是现实

中存在的经济学。

现代控制理论的内容主要由两个部分组成，一为确定性控制理论，二为随机控制理论。确定性与实际存在的联系自不待言。就随机性系统来说，各种结果的概率是确定的，因而实际上也就排除了小概率事件会成为主流的情况。但是，无论在自然界还是在社会经济生活中，我们都可以发现不但那些根本没有概率可言的现象可能产生和发展起来，并且那些出现频率低的事件也可能变成频率高的事件，而曾经出现频率高的事件，随着条件的变化，却会变为小概率事件甚至是不可能事件。

看来，现代控制理论有点“偏爱”实际存在的经济现象和不变的秩序，总想通过反馈、最优控制等办法把这些经济系统控制得更好一些，使其运行最佳化。这当然无可厚非，因为现实的经济生活总不可能瞬息万变。一个产业总要生存很长时间，并为人们提供各种消费品，满足人们的各种需要。因此这种方法自有其用武之地。但是，由于它对那些新生的产业、正在衰亡的产业这样一些常见的经济现象，置若罔闻，所以我们也不能不对它颇有“微词”，并试图借鉴前沿科学中的某些成果来填补至今仍存在于动态经济分析中的空白。

这门新科学就是耗散结构理论，它的形成也只是近一、二十年的事情，至今仍在蓬勃发展。在这种时候，要将它移植于经济分析之中，并且不停留在机械的挪用和标签式的类比上，而能对现有的经济分析方法提供一些实质性的帮助，实在不是一件易事。在本书的后面几章里，我们将努力勾划出它的大致轮廓来。

我们将会看到，耗散结构理论的思想有助于建立一门严格的有关“演化”的经济学。迄今为止，在这个领域中并不存在严格和系统的分析，还没有真正从经济系统发生学的角度来看问题。

我们还会看到，耗散结构理论和现代经济分析结合在一起，不仅为经济系统的演化提供了较为坚实的理论基础，为“演化”与“实存”之间架起了桥梁，而且还能为科学地制定宏观经济政策提供很多有益的帮助。

在本章的其它部分，我们将概要地介绍耗散结构理论的基本思想及其对经济系统的动态分析所提供的启示。在第七章中，将运用耗散结构理论的基本思想来分析分工和分业的演化过程，并提出产业政策的制定原则。在第八章中，我们将给出描述分工过程的简单数学模型。

6.2 开放系统与耗散结构

可以从各种各样的研究目的和角度对系统进行分类，例如上述中所指出的确定性系统、随机性系统和不确定性系统。为了理解耗散结构的基本思想，更深刻地分析社会经济系统，我们要换一个角度来认识问题。可以这样说，任何系统都可以由孤立性、封闭性和开放性做出区分。

孤立系统是与外界既没有物质、又没有能量（和信息）交换的系统（见图6.4）。严格地说，世上不存在真正的孤立系统，只有近似的孤立系统。

封闭系统是与外界有能量交换（因此也有信

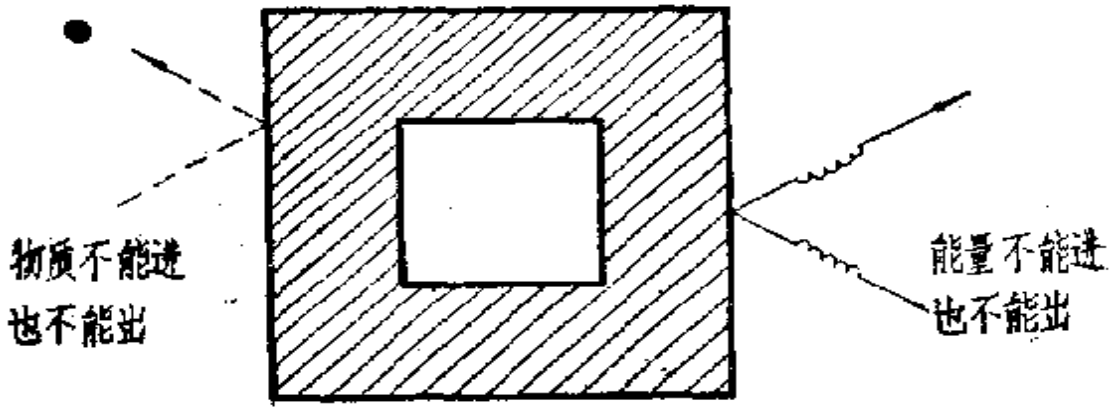


图6.4 孤立系统

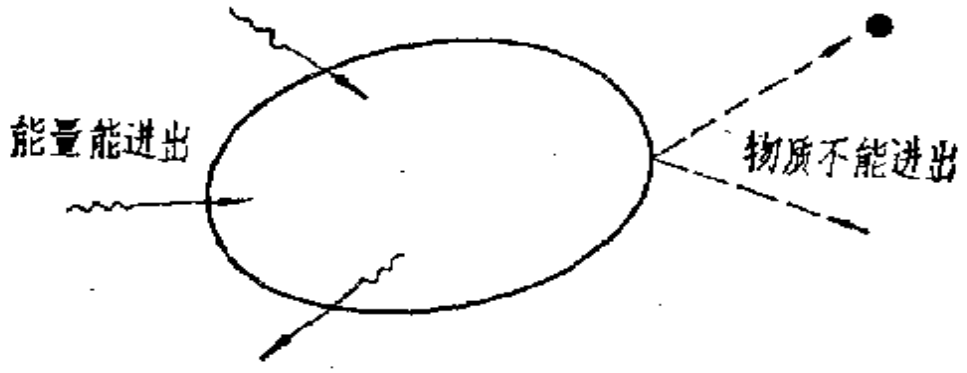


图6.5　封闭系统

息交换），但没有物质交换的系统（见图6.5）。如果我们忽略陨落的流星和宇宙尘埃，地球就可以看成一个封闭系统。地球接收到太阳和其它天体的辐射，而它自己又向星际的辐射冷区进行辐射（见图6.6）。自然，如果我们把生活在地球上的人类和地球一起看成一个复合的系统，那末这个大系统也可近似地看成一个封闭系统。

开放系统是一种与外界自由地进行物质和能量

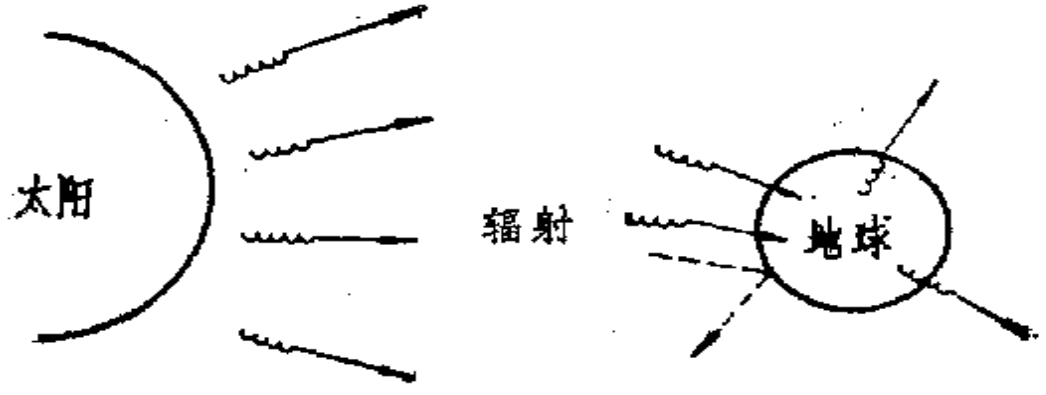


图6.6　地球近似地是一个封闭系统

（及信息）交换的系统。例如，城市就是一个典型的开放系统（见图6.7）。显然，它既是一个输进食物、燃料、建材、各种信息等等的中心，同时它又送出制成的产品和废料。任何一个现代企业也都是一个开放系统。

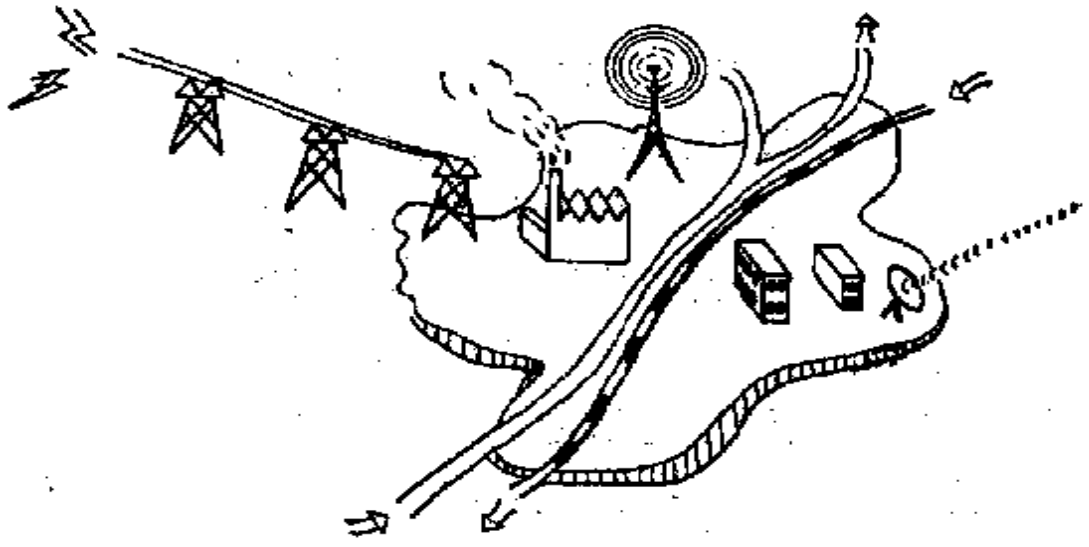


图6.7 城市——一个开放系统

耗散结构理论的主要研究对象是开放系统。而宇宙中的各种系统，无论是有生命的还是无生命的，无论是自然的还是社会的，实质上无一不是与周围环境有着互相依存和互相作用的开放系统。

耗散结构的概念，是相对于平衡结构的概念而提出的，它的严格的原本涵义来自于物理学（即非平衡态热力学）。长期以来，在物理学中人

们研究的主要对象是平衡系统的稳定有序结构，例如晶体的平衡结构。在温度比较低的条件下，构成这种系统的分子有序地排列着，并且保持着一种稳定的结构。这时，系统内部的热运动只能使分子在平衡位置附近振动，并不能破坏系统整体的有序状态。只有当温度不断增加并达到一定的临界点时，原有的稳定的有序状态才会遭到破坏，产生相变（即结构的改变），例如晶体（固相）变成液体（液相），再变成气体（汽相），整个系统由平衡的稳定有序状态转变成不稳定的相对无序的混乱状态，或变为稳定的有序程度较低的平衡状态。这些都是从有序到无序的物理现象，有关它的运动机制和稳定性等问题，一般以平衡态热力学（及其拓广）就可以处理了。然而，有关非平衡态问题以及从无序到有序的机制问题，就要求助于新的分析方法了。

在人们通常的想象中，一般总认为系统若处于一种混乱无序的非平衡状态，是不可能显现出一种稳定的有序结构的。传统热力学的定律也是如此说的。但是，耗散结构理论的建立者普利高津却指出，一个远离平衡的开放系统，通过与外界不断地交换能量和物质，可能在一定条件下产生自组织现

象，形成新的稳定的有序结构，实现无序向有序、较低的有序向较高的有序的转化。这种非平衡态下的新的稳定有序结构，普里高津等人称之为**耗散结构**。用“耗散”这一词的涵义，在于系统要不断地消耗能量。这种有序稳定结构与平衡结构不同。稳定的平衡结构或不与外界交换物质和能量，或不改变内部的运动格局（保持变量数及变量间的关系），可以说是一种静止的稳定的平衡状态，没有生机，是一种永远不变的“死”结构。而耗散结构随时与外界交换能量和物质，其内部的运动格局也有所改变，可以说是一种动态的稳定有序结构，充满生机，是一种“活”的稳定有序结构。生命就是一种远离平衡状态的高度有组织的有序结构，它要不断新陈代谢、吐故纳新，才能存在、延续和发展。

长期以来，人们在经济学中一直比较关注的也是各种比例的平衡和稳定的发展，而对于那些深刻的非均衡和不稳定的经济现象却一直未给予应有的重视。这就妨碍了人们正确地认识社会经济系统是怎样从较低的有序结构发展到较高的有序结构，难以系统而周密地分析社会和经济长期停滞不前的原因以及新的有序结构形成的机制。耗散结构理论的

出现，提供了一种新的分析方法，为解决这些重大的难题开辟了新的道路。

6_3 进化与熵

有序现象和无序现象是自然界和社会经济中普遍存在的一对矛盾。过去人们往往把物质运动分为两类，一类有严格的秩序和结构，例如晶体就是一种有序结构；另一类则杂乱无章，没有一定的秩序和结构，例如气体分子的热运动。现代科学指出了这种绝对的划分是不正确的。有序和无序之间并无不可逾越的鸿沟，它们之间有着密切的联系，并可以在一定条件下相互转化。

在热力学中，用“熵”这个概念来量度系统有序程度的大小。我们可以期望把这个概念拓广到其他领域，特别是经济领域，以便引入与此有关的新的分析方法。那末什么是熵呢？首先，我们先介绍一下可逆和不可逆过程的概念。

在自然界和人类社会中所发生的一切现象，严格地说都是不可逆的，而可逆只是近似而言的。不可逆的直观涵义就是变化发生后无法在一切条件都

不变的情况下又变回原状。其实，人类社会的总演进过程就是典型的不可逆过程。例如，人是从猿而来的，但人却不能再退化到猿，人类社会是从原始社会发展而来，却再也不能复归到原始社会。

在物理学中，可逆过程和不可逆过程有着本质的区别。例如，在衣服上滴上一滴墨水，墨水会自动地向周围扩散，但扩散开的墨迹却绝不会再自动聚拢为原来的一点。这种情况被“热力学第二定律”所描述。

热力学的一般原理描述了由大量分子构成的宏观系统的运动和变化。热力学第一定律着重在“运动量”的问题上，它表述了能量守恒：系统内能量的任何改变一定是相同大小的能量通过边界传递的结果。热力学第二定律则着重在“运动的方向”问题上，它论述了可逆过程和不可逆过程之间的区别，指出在一定的条件下系统的状态将有一定的运动方向。为了作定量的表述，人们引入了一个新的函数，叫做“熵”。简单地说，熵是一个系统的状态的函数，这个函数可以度量一个系统组织程度的高低。

熵与能量不同，是不守恒的，通常用符号S表示。熵（S）在一个短的时间间隔（dt）中的变化

写作ds，称为熵变化。熵变化（ds）由两项构成：第一项$d_e s$是通过系统边界的熵的传输，第二项$d_i s$是系统内的熵产生。因此我们有关系式：

$$ds = d_e s + d_i s$$

熵产生的基本特征是：通过它能辨别不可逆过程。热力学第二定律指出，对于整个热力学过程熵产生都是非负的，即：

$$d_i s \geqslant 0$$

当过程是不可逆时：

$$d_i s > 0$$

举一个具体例子来说明：两种不同温度的气体的混合（见图6.8）。我们假定这个系统是孤立的

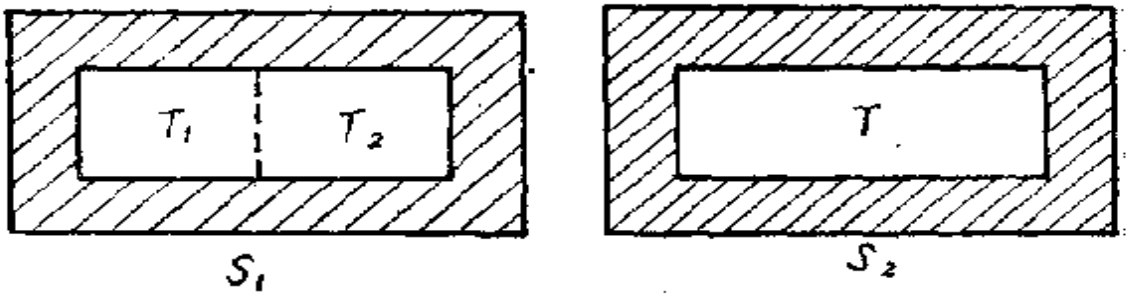


图6.8 不同温度的气体混合

即$d_e s = 0$，因此在这种情况下我们有：

$$S_2 - S_1 = \Delta S = \int d_i s > 0$$

于是，在这个例子中，第二定律归结为通常的经典提法：在一个孤立系统中熵增加。

当$d_i s = 0$时，只有可逆过程才能进行（因为熵是状态的函数，这时可以在条件不变的情况下由初态开始经历变化过程，又返回初态）。

熵具有独特的地位，它的变化和过程的方向有密切关系。因此第二定律给我们提供了宏观演进的普遍定律，这就是在孤立系统中的熵增加原理，或一般系统的熵产生（$d_i s$）非负原理。

现在我们要问：这样的熵增加对于所涉及到的分子系统来说可能意味着什么？为了给予明确的回答，我们必须研究熵的微观意义。让我们具体地讨论一种气体或液体，来看一看熵以及熵增加概念究竟意味着什么。玻尔兹曼(1872年)第一个指出，熵是分子无序的量度，因此熵增加定律是一个简单的增加混乱度的定律。举例来说，讨论一个用可渗透的隔板分成相等的两部分的容器(见图6.9)。其中所盛气体共有N个分子。这N个分子可以分成数目为N_1和N_2（$N_1 + N_2 = N$）两组，分法共有P种，由一

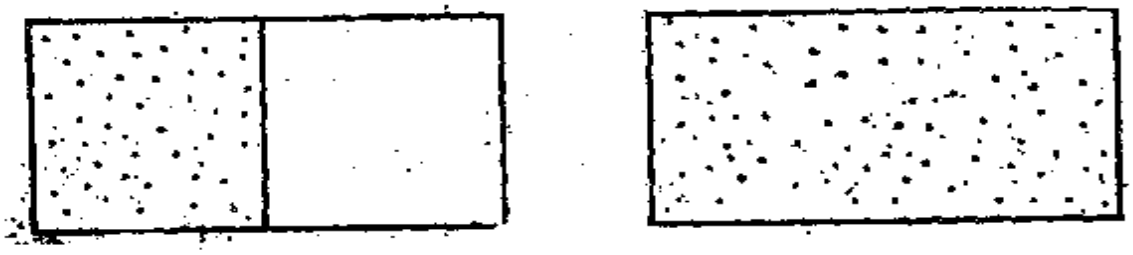


图6.9　气体分子的分布

个简单的组合公式所确定，量P叫做“配容数”。

$$P=\frac{N!}{N_1!N_2!}$$

从N_1和N_2的任一初始值开始，我们发现在一个足够长的时间后，容器中气体达到了平衡状况，即除了小涨落以外，分子在两个间隔当中均匀地分布（$N_1=N_2=N/2$）。易见，这一状况相当于P的极大值，而且在变化的过程中P在增加。这种考虑使得玻尔兹曼确认配容数P与熵的关系为：

$$S=k\log P$$

这里，k是玻尔兹曼普适常数。这一关系明确指出，熵增加表示分子无序的增长，恰如配容数增加所反映的一样。在这样一种演变过程中，初始状态被“忘记”了，即无论初始时N_1、N_2取什么值，到头来都趋于$N/2$。如果在初始状态，一个室中的粒子数目比另一室中多得多，这种不对称性将总会被破坏。

在上面的例子中，我们讨论的是孤立系统。现在我们来看封闭系统。这种情况类似于孤立系统的情况，只要引入一个新的状态函数，亥姆霍兹自由能F或吉布斯自由能G，来代替状态函数熵S，就可以得出类似的关于系统状态运动方向的结论。**定义：**

$$F=E-TS \qquad G=E-TS-XY$$

其中：E为系统的内能，T是绝对温度，X为广义位移（如体积V），Y为广义力（如压强P）。结论是：在T和X恒定下，封闭系统的演化取F减少的方向，达到平衡态时F取极小值，即$(\Delta F)_{T,X}\leqslant 0$，或在T和Y恒定下，封闭系统的演化取G减少的方向，达到平衡时G取极小值，即$(\Delta G)_{T,Y}\leqslant 0$。这个结论是热力学第二定律对于封闭系统的表述，它指出了在这种情况下有序和无序之间的转化方向。

当然，在系统处于开放的非平衡态的过程时，这种判断就不适用了。为此，就产生了非平衡态热力学的耗散结构理论。社会经济系统一般都是开放系统，而且往往处于非平衡态的过程中，需要借用耗散结构理论来分析有关问题。然而，无论是引入F或G概念来处理平衡态的封闭系统，还是采用耗散结构理论来处理非平衡态的开放系统，都和熵这一基本概念的涵义有关。因此，首先要在社会经济领域中把熵的概念加以拓广。通常以熵来量度无序度，而以负熵来量度有序度。在社会经济领域中，常采用负熵概念。

那末，在社会经济系统中，负熵的具体涵义是

什么呢？下面我们介绍一种要素—结构复杂性的负熵量度。这里，要素指的是系统的构成元，结构指的是要素之间的关系。用这种方法可以在一定条件下衡量社会经济系统的结构的复杂程度或组织程度，也就是有序程度。讨论将限于二元关系（即任意两个构成元之间的关系）的情况。

设系统的构成要素集合为$m=\{m_1, m_2 \cdots m_n\}$，其中$m_j$（$1 \leqslant j \leqslant n$）为构成系统的某一要素。再设要素之间的二元关系种类为$r=\{r_1, \cdots, r_k\}$，其中r_i（$1 \leqslant i \leqslant k$）是一种二元关系。用符号$r_i(m_j)$表示这样一些序对$(m_j, m_{p1})$，$(m_j, m_{p2})$，$\cdots (m_j, m_{pt})$的总和，其中每个序对的关系都是$r_i$(例如父子关系)，而$m_{p1}, \cdots, m_{pt}$是m的其他构成要素；再用$L_{ij}$表示这些序对的个数，并称其为元素$m_j$上的关系$r_i$的外延长度。如果集m的全部元素数目等于n，那末在整个集上的关系r_i的外延长度为L_i，由下式确定：

$$L_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}$$

在元素m_j上的关系r_i的负熵，仿照申农的信息公式定义如下：

$$H(m_j, r_i) = -p[r_i(m_j)]\lg p[r_i(m_j)]$$

其中：$p[r_i(m_j)]$由下式确定：

$$p[r_i(mj)] = \frac{L_{ji}}{n-1}$$

这里，分子是元素m_j上的关系r_i的实际外延长度，分母则是其最大可能的外延长度，n是全部元素的数目。

在元素m_j上的负熵可对i求和来得到：

$$H(m_j,r) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{L_{ji}}{n-1} \lg\left(\frac{L_{ji}}{n-1}\right)$$

其中，r是各个关系的总和。

相应地，使元素与结构相关的系统总负熵，可由下式确定：

$$H(m,r) = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{L_{ji}}{n-1} \lg\left(\frac{L_{ji}}{n-1}\right)$$

H(m,r)这个量可看做复杂性的量度。*它的倒数1/H(m,r)就是要素—结构简单性的量度。

现在考查一个具体的例子，用它来说明所得到的量度的应用。设给定三个控制系统(见图6.10)。我们可以把这三种类型的系统看成三种管理形式，例如系统Ⅰ，是由总经理直接控制三个部门，是一

---

* 在这个定义中，我们只是从元素及其之间关系的数量上考虑，而把每个元素的重要性及每种关系的重要性（包括强度）都看成是等同的。如果要把这种重要性也考虑在内，则可以加上权重因子，得到较复杂的类似结果。

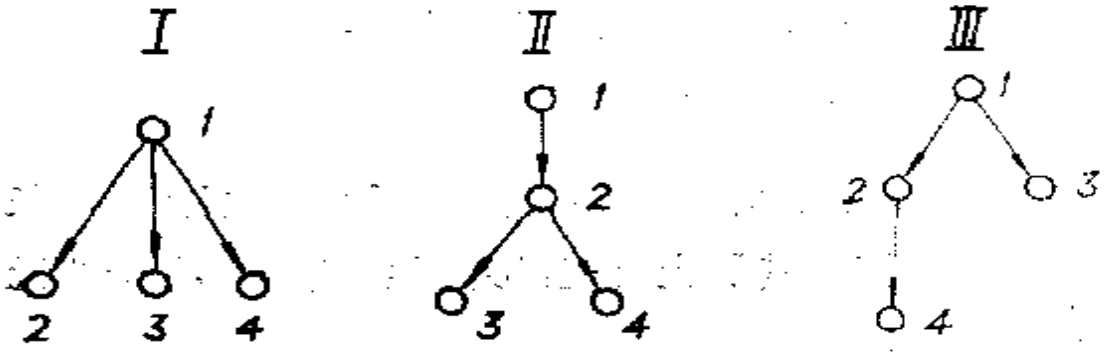


图6.10 三种类型的系统

种典型的集中控制形式。现在我们要问：这三个系统中哪个结构最复杂？

这些系统中有以图的顶点来表示的四个元素和下列诸关系：

r_1——直接控制关系，

r_2——直接从属关系，

r_3——间接控制关系，

r_4——间接从属关系，

r_5——在一个级别上的并列从属关系，

r_6——在较高级别上的并列从属关系，

r_7——在较低级别上的并列从属关系。

在系统 I 中，各元素序对的关系有如下分布：

r_1——(1, 2), (1, 3), (1, 4)；

r_2——(2, 1), (3, 1), (4, 1)；

r_6——(2, 3), (3, 4), (2, 4), (3, 2),

(4, 3), (4, 2);

在这个系统中缺关系r_3, r_4, r_6, r_7。

在系统Ⅱ中有:

r_1——(1, 2), (2, 3), (2, 4);

r_2——(2, 1), (3, 2), (4, 2);

r_3——(1, 3), (1, 4);

r_4——(3, 1), (4, 1);

r_5——(3, 4), (4, 3);

在这个系统中缺关系r_6, r_7。

在系统Ⅲ中有:

r_1——(1, 2), (1, 3), (2, 4);

r_2——(2, 1), (3, 1), (4, 2);

r_3——(1, 4);

r_4——(4, 1);

r_5——(2, 3), (3, 2);

r_6——(3, 4);

r_7——(4, 3)。

在系统Ⅰ中, $L_1=3$, $L_2=3$, $L_5=6$。

在系统Ⅱ中, $L_1=3$, $L_2=3$, $L_3=2$, $L_4=2$, $L_6=2$。

在系统Ⅲ中, $L_1=3$, $L_2=3$, $L_3=1$, $L_4=1$, $L_5=2$, $L_6=1$, $L_7=1$。

在系统Ⅰ中，$L_{1,1}=3$，$L_{2,2}=1$，$L_{2,5}=2$，$L_{3,2}=1$，$L_{3,5}=2$，$L_{4,2}=1$，$L_{4,5}=2$。因此系统Ⅰ的总负熵如下：

$$H_{\text{Ⅰ}}(m,\ r)=-\frac{3}{3}\lg\left(\frac{3}{3}\right)-3\left(\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3}\right)$$
$$-3\left(\frac{2}{3}\lg\frac{2}{3}\right)=0.8293$$

在系统Ⅱ中，$L_{1,1}=1$，$L_{1,3}=2$，$L_{2,1}=2$，$L_{2,2}=1$，$L_{3,2}=1$，$L_{3,4}=1$，$L_{3,5}=1$，$L_{4,2}=1$，$L_{4,4}=1$，$L_{4,5}=1$。因此，系统Ⅱ的总负熵如下：

$$H_{\text{Ⅱ}}(m,\ r)=-8\left(\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3}\right)-2\left(\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}\right)$$
$$=1.5071$$

在系统Ⅲ中，$L_{1,1}=2$，$L_{1,3}=1$，$L_{2,1}=1$，$L_{2,2}=1$，$L_{2,5}=1$，$L_{3,2}=1$，$L_{3,5}=1$，$L_{3,8}=1$，$L_{4,2}=1$，$L_{4,4}=1$，$L_{4,7}=1$。因此系统Ⅲ的总负熵如下：

$$H_{\text{Ⅲ}}(m,\ r)=-\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}-10\left(\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3}\right)$$
$$=1.7629$$

显然，从要素—结构复杂性标准来看，系统Ⅲ的结构最复杂，系统Ⅱ次之，系统Ⅰ最简单。从直观上看，系统Ⅰ的关系种类最少，系统Ⅲ的关系种

类最多。因而计算结果的意义是不难理解的。

有趣的是，这里的结果与玻尔兹曼有序原理的涵义可以相互映照。玻尔兹曼有序原理说明了分子在容器中分布得越均匀，有序程度越低。这里的结果则说明了关系越对称，结构的复杂程度越低。从直观上看，系统Ⅰ的关系对称性最好，系统Ⅱ次之，系统Ⅲ的对称性最差。

另外，从这个例子还可看出，要素完全相同，但结构却可不同，这又导致系统结构的复杂程度不同。

需要指出的是，由于研究的目的和要解决的问题不同，对结构复杂程度的量度并没有一般的方法，要依具体问题而定。

从系统Ⅰ过渡到系统Ⅱ乃至系统Ⅲ，表示系统组织程度增加了，或说结构的有序程度提高了。对于此例，可以这样设想，管理系统随着外界环境复杂化，不断地改变着自己的调节、控制方式和管理结构。而这一点已由管理形式从集中控制过渡到分散控制的事实所证实。但是，类似的这样一种演化需要什么条件呢？该过程又是怎样实现的呢？

关键在于开放系统的负熵流$d_e s$可以大于或小于零，如果$d_e s < 0$，其绝对值又大于$d_i s$，则$ds =$

$d_eS+d_iS\leqslant 0$，这时系统的总熵可以逐步减小，使系统从无序走向有序。这样，在不违反热力学第二定律的条件下，非平衡系统可以通过负熵流来减少总熵，达到一种新的稳定的有序结构。作为开放系统的生物体，其进化过程就是一个有序程度提高的过程，这就要使总熵 S不断地降低，而这也就必须不断通过和外界的交往过程来补充进“秩序”，例如动物的觅食和消化过程，是一种与外界交往的有序过程，形象地说就是“吃进秩序”。相反，如果把生物孤立起来不与外界发生联系，“负熵流”没有来源，则内部熵产生越积越多，系统终将死亡，腐烂，分解，益趋混乱无序。

社会经济系统的一个共同特征，是它们的结构产生于开放系统，而且这种系统只有与周围环境的介质进行物质和能量（以及信息）的不断交换，才能维持生命力。然而，只是一个开放系统并没有充分的条件保证出现耗散结构（即非平衡态中有较高有序程度的稳定结构）。耗散结构理论认为，所有的耗散结构有三个共同的特征，（1）存在于开放系统之中，（2）保持远离平衡的条件，（3）系统内各要素之间存在着非线性的相互作用。因此，普里高津指出，非平衡是有序之源。这是耗散结构理论的

一个基本观点。

把熵的概念推广到社会经济系统之后，我们就有可能在衡量相对的复杂性时，把热力学系统的各种不同的有序状态拿来和社会经济系统作类比。同时，我们也就可以把适用于热力学系统的耗散结构理论的一般方法推广到社会经济系统中来，从而揭示出从无序向有序过渡的稳定结构的形成机制。

6_4 通过涨落的有序

在本书的前几章中，我们曾多次讨论过稳定性。在那里，不稳定性是一种消极的东西，必须以负反馈控制加以消除。这里我们要揭示出不稳定性中蕴藏着非常积极的因素。为此，首先让我们来看一看稳定性是否总是好的。

汽油一旦着火燃烧，就会保持在燃烧的状态，而用外界的干扰把它弄到半燃的状态之后，它还是要回复到燃烧的状态，这种稳定性对于一个消防队员来说是非常要不得的。

又如，已有的产业结构若总能保持稳定，那末由于任何一种产品的需求总有饱和的时候，这些既

有的产业总有一天会不能继续扩大产量。这时候整个经济就会呈现出停滞状态，生产至多只能维持在把损坏的产品进行更新的水平上。在这种意义上可以说，稳定与停滞是同义语。

严格地说，如果没有平衡的打破和不稳定性的出现，那末生命就不会产生，经济也不会发展到今天这个样子，更不会有人类的过去、现在和未来。

当我们追溯天体的演化、生命的起源、人类的诞生、产业的兴衰，无论向哪里看去，我们发现的并不是稳定性和均匀性，而是导致多样性和不断增加着复杂性的进化过程。在这个过程中，不稳定性起着不可缺少的积极作用。对此，我们将在下面给予说明。

前面已经说过，一个开放系统只有在远离平衡和系统的不同元素之间存在着非线性机制的条件下，耗散结构才能出现。

一个开放热力学系统可能有三种不同的稳定的存在方式。从相对的复杂性上讲，我们可以用它们和社会经济系统做类比。

第一种方式是热力学平衡态。在这里，经过能量和物质的流动，已经消除了各局部的温度和浓度的差别，熵增加到一个新的较大的值，系统各处有

一致的温度和浓度。与这种情况类似的是纯粹的自然经济，完全自给自足，劳动者的技能和生产方式基本上没有什么差别（从一定的科技水平和管理水平上看）。

第二种可能的方式与平衡态只有一点微小的差别，只是系统内各局部的温度和浓度保持有一点小小的不同。因而它保持近似平衡。如果这种对平衡的偏离足够小，那末可以用对平衡态加上一个与偏离成正比的小的修正来分析这种系统——因此把这种系统叫做“线性非平衡态”。然而，正因为如此，任何新的结构和组织都不可能出现。这与小商品经济（或简单的商品经济）相似。交换是以自足之后的剩余产品为基础的，因而量是不大的。这种情况与纯粹的自然经济十分接近。交换的种类、多寡是围绕着自给自足这个平衡态作微小的波动。这种波动并不能使整个经济系统远离自给自足这个稳定的平衡态。

第三种可能的方式，是远离平衡态的稳定有序的存在方式。这时，情况变得完全不同，这是系统内部的强制力保持一定的值，迫使系统远离平衡时产生的结果。在这种情况下，新的结构和新型的组织能够自发地形成。这是一种典型的自组织过程，

系统的存在方式叫做“耗散结构”。与这种情况类似的是复杂的商品经济，这时分工非常发达，劳动者的技能、各种生产技术和产业之间的差别日益明显，各种生产要素（如劳动力、资金、原材料）在时空上的分布极不均匀。那种均匀的自给自足的平衡态已被打破，分工的发展使得整个经济系统日益远离这种平衡态，而形成一种新的稳定状态。

以耗散结构理论分析非平衡态热力学系统的一个典型例子是“贝纳特问题”。通过它可以揭示出耗散结构形成的一般机制，从而可以借来分析社会经济系统的有序化的形成过程。所谓贝纳特问题，就是在受热的液体中形成贝纳特花样，即有规则的对流元胞。在这个例子中，形成耗散结构所需的另一基本特性——非线性机制，恰好由流体动力学中的贝纳特不稳流所提供。

让我们看这样一个例子。考虑处在不变的重力场中，在两个平行的无限平板之间有一水平液层。从底部给液体加热。若下界面温度保持为T_1，上界面温度保持为T_2，且$T_1 > T_2$。这样，液体不断从下表面吸收热量，形成一个开放系统。当$T_1 - T_2 = \Delta T$小于某一临界值λ时，也就是说当加热缓慢进行时，热量通过传导方式输送，液体处于上述的第

二种存在方式，即线性非平衡态方式。众所周知，所谓热传导就是这样一种能量（热量）的传递方式：靠近热源T_1的分子的振动较强，与离热源较远、振动较弱的分子相互碰撞，将热量从一个分子传递给下一个分子，而绝大多数分子基本上仍然保持在自己原来的位置上。从传输（交换）机制的复杂性上讲，我们不难看出这与小商品经济情况颇为相似。在小商品经济中，少量的剩余产品的交换都是就近进行的，因而也很难有值得一提的产业形成。

当加热速度增加到使$\Delta T > \lambda$时，液体内会突然自发地产生出无数个有序的六角形对流元胞，在六角形对流元胞的中心，液体向上流动，在六角形元胞的边缘，液体向下流动，形成所谓贝纳特花样。这样一个变化过程，又称为贝纳特不稳定。正是在这个“不稳定”的基础上，当体系达到某一临界时，才出现了稳定化的宏观有序的新组织和新结构。从图6.11可以看出，元胞非常规则。这对应于热量的输送由热传导机制变成了新的机制——宏观的对流。这时分子处于高度有组织的状态。这一流动花样，需要足够大量的分子在足够长的时间内有条不紊的进行运动才能实现。如果我们回想一下热对流

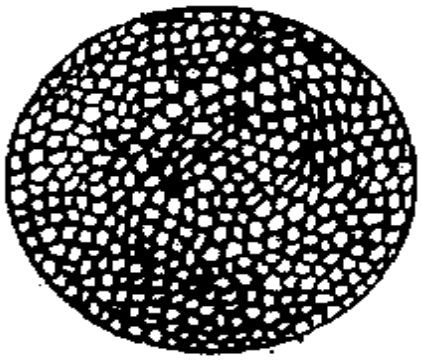


图6.11 贝纳特花样

概念的涵义，即受热的物质或分子发生宏观的运动，造成热量从一处传递到另一处，那末我们容易看出这可以与复杂的商品经济作类比。伴随着分工、专业化和社会化的发展，不仅劳动力等要素发生大规模的流动，而且商品交换的范围和距离也极大地扩展了，形成了复杂的产业结构。

我们可以设想，在贝纳特问题中，不管是$\lambda>\Delta T$还是$\lambda<\Delta T$，总会有一些很小的对流，作为对于平衡状态的涨落。但是，当$\Delta T<\lambda$时，这种涨落将减弱和消失。反之，若ΔT高于临界值λ时，涨落将被放大并产生宏观对流。一种新的分子有序出现了，它对应于因与外界交换能量而稳定的巨涨落。这种有序的特点是出现耗散结构。与平衡结构不同，耗散结构可以具有包含大量个体协作的相干状态。同时，这种宏观的巨涨落只有通过与外界不断交换物质和能量才能获得稳定。一旦$\Delta T<\lambda$（例如放慢加热速度，使得与外界交换物质和能量受到限制），贝纳特花样立刻瓦解。这种通过涨落的有序与平衡结构（如晶体和液体）的有序完全不

同，在平衡结构中，如晶体的有序化过程并不需要与外界交换能量和物质也能维持。

一般地讲，在耗散结构中，通常下列三者是彼此关联的：系统由非线性关系（或机制）所显示的功能；由不稳定性所获得的时间—空间结构，以及激励不稳定性的涨落。这三者的相互作用，导致“来自涨落的有序”这种极其意外的现象。三者的关系如图6.12所示。这种“通过涨落的有序”是耗

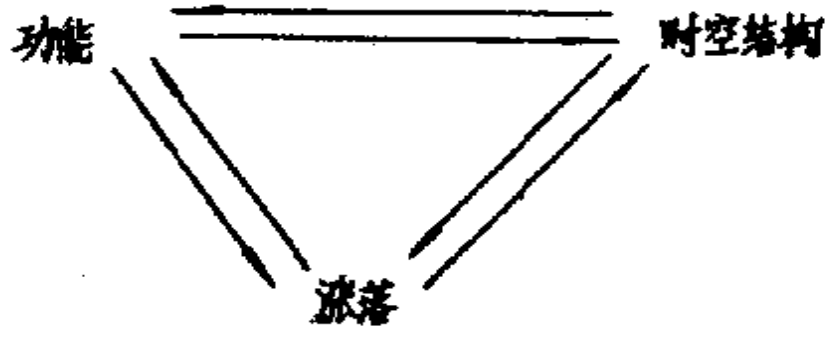


图6.12　功能、结构和涨落的关系

散结构理论的另一个基本观点，它表达了一种新的有序性原理，在实质上这相当于涨落被放大并且通过与外界交换物质和能量而获得最终的稳定。

不难看出，涨落具有二重性。在平衡态和近平衡态，对于平衡结构来说，涨落是一种破坏稳定有序的干扰，起一种消极作用。在远离平衡态，对于耗散结构，它是由不稳定形成新的稳定有序状态的杠

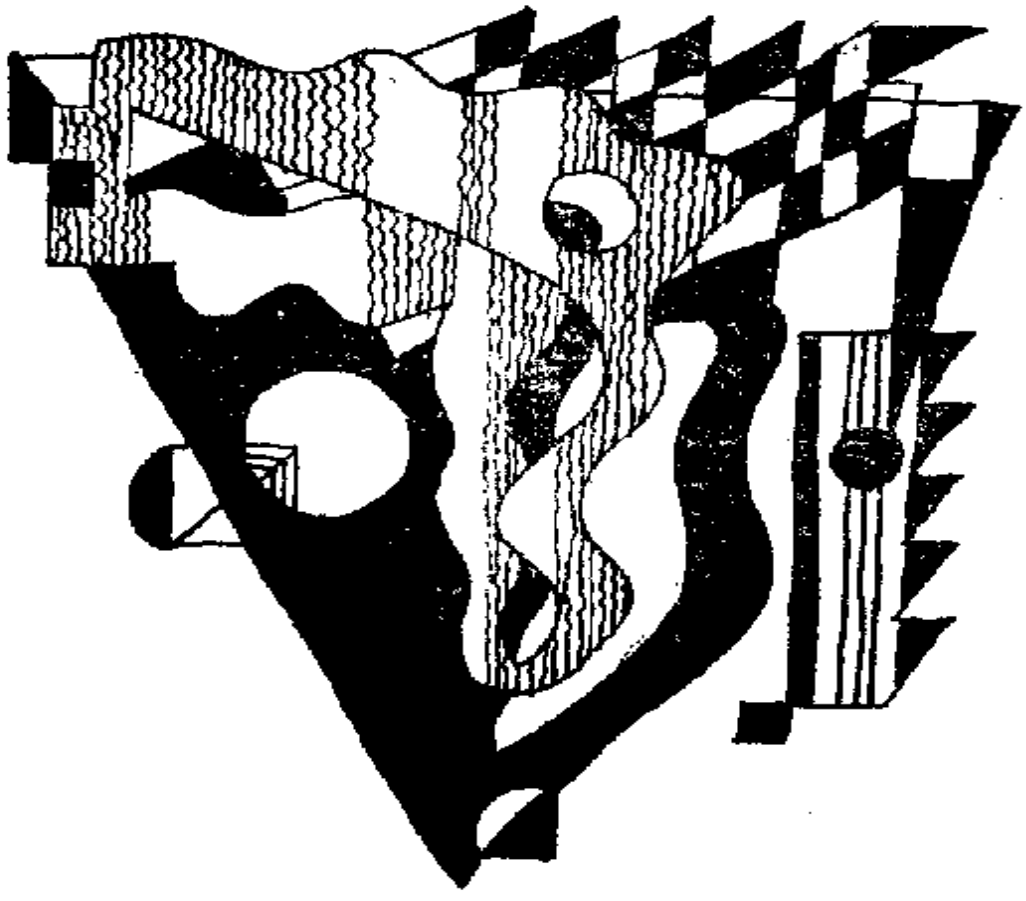
杆，起着一种积极的建设性的作用。一个小的起伏可以引起一个新的变化，它将剧烈地改变宏观系统的整个行为。自组织机制就是通过涨落的有序。由此，没有差别的均匀状态，对于离开均匀状态的小偏离来说，反而变成了不稳定的状态。通过涨落达到有序，是耗散结构理论的另一个基本观点。

总而言之，耗散结构理论有两个基本观点，可以推广应用到一般系统：

第一，非平衡是有序之源——即系统只要满足开放、远离平衡态以及内部各要素之间存在着非线性的相互作用这三个条件，就有可能产生有序化过程，形成非平衡态的稳定有序结构；

第二，通过涨落达到有序——即上述可能性只有通过涨落才能成为现实性，其机制是在系统内的强制力超过临界点的条件下微涨落转为巨涨落，从而完成有序新结构的自组织过程。

下面我们将用这两个基本观点来分析动态经济系统，并给这里提出的概念以经济学解释。



第七章

产业兴衰的耗散结构模型

7.1 引言

在经济和社会的演进过程中，有一类最重要的现象和过程就是分工、分业的产生及其结构的变化。

从有人类文明以来，至今已有几十万年的历史了，当今的产业结构真可说得上是五光十色，千姿百态，令人目不暇接，其中既有几十万人的大产业，又有几千几百人的小产业，产品成千累万，数不胜数。但这一切却又都是从那几十万年以前依靠摘采野果、捕食野兽，并无什么真正产业可言的原始社会演进而来的。在这样一部几十万年的产业发

育史中，经历了一个从无到有、从少到多、从简单到复杂的系统发育过程，其中既有产业的夭折和勃兴，又有产业的繁盛和衰亡；既有长期的停滞，又有蓬勃的发展；既有大陆漂移式的渐变，又有山崩地裂式的飞跃；既有戏剧性的冲突，又有不可阻挡的趋势；既有血泪和欢乐，又有教训和经验。要从这样一幅波澜壮阔、千变万化的图景中理出一条清晰的线索和规律来，实在不是一件容易的事。

对已经存在的事物进行分析还是比较容易的，但若要对“无中生有”进行分析，真是比登天还难。生命是怎样产生的，至今悬而未决。人类的起源是怎样的，众说纷纭，莫衷一是。对于分工、分业和产业结构的兴衰与变化进行分析，也面临着同样的问题。

迄今为止，对于分工、分业的兴衰及其结构变化的演化机制，还从未有过系统的理论解释。在我国理论界，虽然非常重视生产过程的专业化和社会化，重视分工的发展，但长期以来仅偏重于对分工的各种经济社会后果和好处进行分析和研究，而忽略了对分工、分业究竟怎样发生以及如何发展问题的探讨。对于这样一个困难的问题，我们将借助耗

散结构理论综合已有的成果，给出尝试性的理论描述和数学分析。

通过对产业和分工结构的这种分析，我们将刻画出一种新的调节和控制方式，姑且称之为**自组织控制**。这种控制方式与前几章所介绍的控制方式有着很不相同的特点。

7.2分工分业中的“涨落”

涨落现象无论在自然界还是在经济或社会中都是极为常见的，有时我们也将这种涨落称为波动或起伏。如前章所述，投掷硬币看其是正面朝上还是反面朝上，当投掷次数很多时，两者的比例是1：1，但从若干次投掷来看，不是正面多一些，就是反面多一些，两者的比例围绕着1：1波动。又如，男孩与女孩的出生比例，从总体上看约为1：1，但从若干个家庭看，不是男孩多一些，就是女孩多一些，二者的比例总是围绕着1：1波动。

那末，什么是分工分业中的涨落呢？为了说明这一概念，我们先对什么是产业结构及这种结构的平衡和稳定做些说明。

产业结构指的是产业之间的某种关系，也就是说，在某一地区或某一国家里，各个产业中的劳动力、净产值以及投入的资本等经济指标，在各个产业中的分布状况或比例关系。

产业结构的平衡，指的是上述比例关系在一个时期保持不变的状态。这种平衡当然是一种宏观的动态平衡（类似于热力学中的热动平衡），即在一段时期内，虽然这种比例关系随时都在变化，但比例的平均值却是基本不变的。

产业结构的稳定，指的是这种平衡对于各种小的扰动有保持或恢复平衡的能力。对于不稳定的平衡而言，只要略有扰动，系统偏离了这个平衡点就不能再恢复了，所以这种不稳定的平衡对于实际运动没有多少意义。因此，下面我们所谈到的产业结构的平衡都是指的宏观动态的稳定的平衡。

当我们把眼光转向分工、分业的历史或现实时，我们不难看到两种涨落现象。一种现象是：在一段时间里，产业结构从宏观上看是平衡的，即上述的比例的长期平均值保持不变或变化甚小。但从微观上看，则会发现劳动力和资金等不断地在各个产业间流动，各个产业的净产值也在不断地波动。有的企业今天产生了，明天又关闭了，或者，一方

面有的企业产生了或扩大了，一方面又有的企业关闭了或缩小了。我们称这样一种波动或涨落现象为分工、分业的微涨落，这种涨落的特点是它不影响宏观产业结构的平衡，而仅仅表现为在上述比例的平均值周围的波动。这种微涨落现象在整个分工、分业的发展史中比比皆是，频繁发生，从未停止过。

另一种现象是：一些新的产业突兀而起，例如电子工业的崛起及其迅速发展；一些产业的相对地位下降甚至消失，例如纺织工业的相对地位下降，手工织布业已近乎绝迹。我们称这种现象为分工、分业的巨涨落，其特点是这种涨落会改变原有的宏观产业结构，并打破产业结构的平衡。这种涨落在整个分工、分业的发展史上远不如微涨落那样频繁，但其一旦发生就会势不可挡地改变分工、分业的宏观图景，而且这种涨落在很大程度上是带有规律性和确定性的。

在分工、分业的涨落中，微涨落虽然极其频繁，无时不在，但却很少受到人们的注意和研究。其所以被忽视的原因，也许是因为人们认为它对宏观图景的改变没有什么贡献。巨涨落虽然少有发生，但因其强烈地改变着宏观图景，表现出产业的

长足进步，成果非常丰富，极大地造福于人类，因而自然也就引人注目。绝大多数研究分工进步的人对这种现象都非常关注。但是以后我们将会看到，如果忽视了对微涨落的研究，那末巨涨落产生的原因和分工、分业发育的机制是不可能得到正确的说明的。因为巨涨落正是在一定的条件下由微涨落演变而来。在这两者之间有着不能忽略的重要联系，即在一定的条件下，随机的或不确定性的微涨落必然演化成确定性的巨涨落。

下面我们将通过考察包干到户后我国农村中分工、分业的发展过程，来阐明这种普遍的机制。

当我们把当前农村劳动主体的分工和活动内容的分业综合起来考察时，看到的似乎是一幅混乱的、充满随机因素影响的画图。无论农户家内分工、专业承包和农村中非农业人口的产生，还是农村各种新产业的萌生和成形，似乎都是在充满碰撞的道路上听凭偶然性支配的。这里的确有极其复杂、数量众多的因素在相互作用着，例如需求结构，技术结构，运输条件和商业体系，以及社会文化和心理的变化，都会从意想不到的侧面给农村分工、分业以复杂的影响。要找寻其中的发展规律，实在是件十分困难的工作。

但是，考虑到其他一些民族在向现代化起飞之初，因选择了有远见的政策而捷足先登的经验，我们还是应当在理论上探讨我国农村分工、分业进一步向前发展的秩序。由于过去长期偏重于对分工、分业的各种经济社会后果作研究，而忽视了对分工、分业究竟是怎样发生、发展等问题的探讨，因此，这方面的研究本身也有着独立的理论意义。

我们首先要指出目前农村分工、分业发展过程中最有意义的一个特点，即分工涨落开始频繁起来。这种分工涨落的最直观背景是：在农村分工、分业过程中，任何方面和任何层次的变化都不表现为只前进不后退，而表现为有进有退，有涨有落。这个特点普遍出现于农村分工、分业的经验材料之中。

先看劳动者分工。由于农村分工的特点，农户家内分工的界限经常变动，“样样都干”的劳力在家庭中先变为兼业劳动力，进而变为专业劳动力，但决非一下子定型，常常是独立出来，又因为环境的某一变动而退缩回去。同理，家庭内能够完全脱离耕地的劳力的产生，小而全农户向兼业户、专业户的演变，广义非农业人口的游离，也都不能够一刀砍断同传统结构的全部联系，而总要经历出出进

进的反复。

再看劳动的分业。农村越是不为了自身消费而生产，就越容易受到外部世界各种变动的不可抗拒的影响。小到一个经营项目，大到一项产业的成形，以及某些技术环节的独立，都要在相当的一段时间内，由生产者同消费者在或多或少的各种可能性中进行选择，反复尝试。其基本模式，不是直线行进，而是既有兴旺、繁荣，又有衰落、萧条乃至废弃——这些都可以概括为分工、分业中的涨落。

注意观察就可以发现，分工涨落总是发生于旧有分工结构的平衡被打破之际。在这个意义上我们可以说，分工涨落是分工、分业进步的征兆。

但是，为什么不仅把分工的发展，即所谓“涨”，而且同时也把分工的退缩，即所谓“落”，都看成分工进步的标识呢？

在我国农村中，各种生产要素处在不断的组合之中，因而总会出现各种各样的可能性。其中一类可能性充满着不曾经历过的不确定性质。分工、分业是一种“重新组合”，因此发生于分工过程的不确定性也就不可避免。分工涨落恰是对付不确定性的有效手段。“涨”是对原有分工结构的突破，“落”则表明对新结构的选择没有成功，退回来而

准备作出再一次选择。分工、分业的选择在不断的涨落中进行，失败的风险和代价得以分散并大大减少。这样，既不放过每个有利的、带有尝试性的进取机会，也能够在得到不利信号时从容退却。

分工涨落的关键依据，从理论上说，就是在经济不确定性中包含着某种确定的东西；前者把后者展现出来的条件，就是需要一个随机选择的实际过程，从中完成不确定向确定、非经验向经验的转化。

因此，完全有理由把分工涨落看成是农村分工、分业在不确定性经济环境中实际成长的真正机制。只要我们不仅仅把眼光局限于分工的结果，而是仔细考察分工的发展过程，那末，这样一种机制对于古今中外的任何社会分工的顺利发展都是必要的。

7_3 微观涨落怎样在宏观中获得稳定

为了进一步回答前面提出的问题，我们要指出，目前农村分工、分业的涨落机制，还是初步的，主要成形于微观经济结构之中。它是否能进一

步发展，在涨落中形成具有宏观经济意义的新的产业体系，越来越取决于农村微观经济结构同宏观结构之间的关系。联产承包制普遍实行后，农村的发展已将这样重大的问题提上日程。

正是农村的分工、分业问题，构成了把微观经济结构研究同宏观经济结构研究联结起来的桥梁。

仅仅用微观结构的眼光来考察，目前农村分工、分业的发生和发展，在总体上似乎完全是随机的、偶然的。农村劳动者分工同劳动分业都因各式各样的推动而模糊了原有分工结构确定的界限，扰动着旧有的分工平衡。对于这各式各样的推动，要一一追寻其发生的原因，简直是不可能的。即使追寻出来，也依然无助于从总体上把握农村分工、分业的前景。

于是，我们试着从另一角度提出问题：目前农村分工、分业主要是微观结构的涨落，被其打破的原有分工结构的平衡，还有没有可能得到恢复？这样，问题就变得容易回答了。因为这样可以把研究的注意力集中到微观涨落能不能发展为趋向较稳定的宏观巨涨落的几个必备的条件上来。由此，在充满着随机和不确定因素的混乱中，开始可能整理出个有助于判定分工趋势的头绪来。

这少数几个必备条件就是：（1）收入弹性条件；（2）生产率上升率条件。我们称这两个条件为分工、分业微观涨落能够成长为稳定的宏观巨涨落的临界条件。也就是说，分工、分业的微观涨落若能达到一定的临界水平（即达到一定的收入弹性和生产率上升率），这种微涨落就能得到放大而形成宏观尺度上的巨涨落，从而改变原有分工的宏观图景。若低于临界水平，微观涨落就将被衰减，而由微涨落所引起的原有的分工图景的扰动就将消失，原有分工结构的失衡就将得到恢复。

为了阐明这种机制，先要解释一下这两个条件。

所谓收入弹性，指的是某种产品的需求收入弹性。需求的收入弹性说的是：随着人均国民收入的提高，对某种产品的需求增加或减少的程度，即某一社会产品的需求增长率同国民收入增长率的比，其公式如下：

$$\text{某一社会产品的收入弹性} = \frac{\text{需求的增长率}}{\text{国民收入增长率}}$$

即：

$$e_Y\text{（需求的收入弹性）} = \frac{\Delta Q}{Q} \Big/ \frac{\Delta Y}{Y}$$

其中：Y是收入，ΔY是收入的增量；Q是当收入水平为Y时对某一社会产品的需求量，ΔQ是当收入水平增加为ΔY时的需求的增量。

例如，耐用消费品随着收入提高将会有越来越大的需求，其需求增长的幅度甚至超过收入增长的幅度，因此我们称这样的产品为高收入弹性产品。而对粗粮的需求则随着收入的提高而下降（不仅相对量下降而且绝对量也下降），我们称这样的产品为低收入弹性产品。

显然，一种新的产业要想发展起来，就必须以它的产品有市场需求为前提条件。不难看出，收入弹性条件就是从需求方面来刻画某一产品的潜在市场容量的。这个条件还反映了对产品的动态需求，因为它是与收入的变化联系在一起的。因此，一种产品的收入弹性愈大，随着经济的发展、人均收入的提高，这种产品的市场容量就越大，由此生产这种产品的产业的发展就越快，其在整个产业结构中所占的比重就越高。

以养猪专业户为例。如果猪肉的收入弹性很小，那末农户专业养猪虽比传统的种田之余兼养几头猪能提供更多的猪肉，但由于需求有限，它本身的各环节的进一步分工独立，就只有技术上的可能

性而无法在经济上遇到有支付能力的需求。因此，诸如复合饲料加工业的发展，就得不到足够的经济刺激，更深层次的分工反应也就自然停止。反之，猪肉的收入弹性如果足够大，那末购买批量的复合饲料就是经营上不可缺少的环节，饲料加工的独立和大规模发展才能成为经济上的现实。而一旦饲料加工业成为现实的独立产业后，它同养猪专业就互相产生支撑对方发展的经济要求和经济力量。这样，养猪专业户体系才开始由处于原有分工结构平衡点附近的微涨落状态，转向造就新分工结构，并在新结构中找到自身经济支撑点的分工巨涨落。新产业的产品的收入弹性愈大，涨落就愈加远离原有分工结构的平衡，愈加不能被衰减，这就等于说，系统愈加不能恢复到原有的状态。

所谓生产率上升率，是指一种产品的生产率提高的快慢。这里的生产率是综合的生产率，即劳动生产率、资金生产率、能源生产率等的诸生产要素的生产率的加权平均。如果与前一个条件对比，就不难理解这个条件是从供给方面来刻画产品的生产能力的。因为仅仅有潜在的市场容量还不够，一种产品要想得到实在的市场，那它就必须生产出一定的批量并具有足够高的生产率，这样才能以物美价

廉满足有购买力的需求。

上述两个条件合在一起，就构成了判定分工、分业微涨落能否变成巨涨落而在宏观上得到稳定的必要条件。它们决定着涨落的幅度。

分工、分业的涨落幅度是分工、分业涨落机制程度的标识，它从量上刻画了以下变动：农户家内不同种劳动的相对变化，户内“专业人”的多少，一般户变为专业户的进退，农村中各种专业独立性的大小，农村中非农人口的增减，新产业萌生的消长，等等。最初的涨落总是发生在原有农村分工结构刚刚开始变化之时，这时涨落本身十分微小，仅仅能使旧有分工界限产生微小变动，但这并不一定意味着新结构的形成和新界限的建立。当分工涨落只是十分微小的时候，它只能离开原分工体系平衡点不远的距离，系统恢复到原有的平衡还是很容易的，这时原有的平衡是稳定的平衡。只有当涨落幅度达到某个临界水平时，原结构的平衡才因难以抵御这种自行增大的扰动而失稳，新结构才无可避免地得以产生。

对于具有不同技术特性的产业，临界点的具体涵义不尽相同。广东省西江发水期造成的“低望田”，每块面积达几十至几百亩，要利用这些资源

发展养鱼业，就要求种植业的剩余劳力必须达到一定数量才有可能。这一定数量的剩余劳力便是当时当地养鱼业萌生的一个临界点。不足此数，养鱼业就不可能独立成一种专业，只有达到或越过这点，才有新分工结构的形成。相应地，资金、技术的积累也都需要达到或越过一定的临界点，分工的微涨落才能转变为巨涨落，新结构才可能组织成形。

分工、分业涨落幅度的增大，由收入弹性和生产率上升率这两个条件决定。一个新生产业尽管开始可能弱小，它的产生也可能是完全偶然的，但只要它的产品有较高的收入弹性和较高的生产率上升率，它就能迅速发展起来。而一个老产业的产品尽管曾经畅销一时，但随着收入的提高，它若没有以前那样高的收入弹性，也注定要停滞（即对它的产品的需求已经饱和）或衰亡下去(产品已被淘汰)。通过涨落、平衡、稳定、失稳、临界点等新概念，那似乎不可捉摸的整部产业兴衰史便开始清晰地出现在人们的面前。

一个新产业（或称新的主导部门）的勃兴仅以其自身的能量还不足以使整个分工图景有巨大的改观，这种勃兴仅是巨涨落中的一条干流。由于新产业的产品具有高收入弹性和高生产率上升率，所以

为满足这种（或这些）产品生产需要的其他行业也被带动起来。这就是一种新经营项目可以刺激另一些经营项目的发展或产生，一种新产业可以引致另一些产业的发展或产生。这样，一种新的有序的分工结构就产生了，在这种结构中具有包含大量个别产业的相干协作状态所形成的滚滚洪流，微涨落终于变为稳定的巨涨落。这最终导致了分工的宏观图景的改观。这时，原有旧分工结构的失稳便已无可挽回了，新结构和新界限的确立也就不能阻挡了。

分工微涨落在高于临界时演变成巨涨落，主要是由于分工的连锁反应（即上述的大量个别产业的相干协作状态），这种连锁反应大体上有三种类型：（1）向前连锁；（2）向后连锁；（3）旁侧连锁。现分别叙述如下。

向前连锁指的是一个产业的发展可能引起“瓶口”现象，造成新的短缺现象，从而诱导出新的突破，如原以水力为动力的棉纺工业的发展引起了动力问题，推动了蒸汽机的推广。

向后连锁指的是一个产业的发展对向自身投入生产资料的各部门的影响，如英国棉纺业的发展带动了纺织机械业和染料工业的发展。

旁侧连锁是指一个产业对所在地区的影响，如

形成新的城镇和服务业。

主导部门的收入弹性越高，生产率上升得越快，所引出的连锁类型就越丰富，连锁效应的强度就越大。这样，放大的倍数就越大，巨涨落的幅度就越大，整个分工的宏观图景的改变也就越充分。反之，若微涨落达不到临界水平，它的连锁效应就很弱，因而难于引发这些丰富的变化，便不易进一步形成巨涨落，也就无法改变宏观图景。

7_4 分工分业的“涨落机制”

现在，我们总结一下分工、分业的“涨落机制”。

首先，我们指出各种微涨落是客观存在的，宏观决策者尽管可以利用政策或管制手段压抑某些微涨落，降低微涨落的幅度，但要想消灭这种微涨落却是根本不可能的；同时，生硬地压抑这些微涨落的后果也是极其不利的。其原因在于产业所面临的各种情况随时都在发生各种变化，微涨落就是对这些变化做出的反应，而这种反应只能由具体的生产者做出。因此，微涨落对于宏观决策者来说，一般

只能看成是自发的波动。

分工、分业中的微涨落有两种前途。一种前途是微涨落达不到临界水平而被衰减，宏观的产业结构平衡得以保持，这种情况不用多说了。另一种前途是微涨落达到或超过临界水平，演生成巨涨落，改变分工的宏观图景，并达到新的产业结构的平衡。下面我们要指出这种情况的程序。

当某种自发的微涨落达到临界水平时，不仅自身的涨落幅度增大，而且产生三种诱生作用：(1)诱生其他的新产业；(2)加速原有产业的发展；(3)引致某些原有产业的衰落。在实践中，这三种诱生作用往往是交织在一起的，并和前述的自发的微涨落合流，演生成巨涨落，并改变产业结构的宏观图景。这种巨涨落往往要持续一段时间，随着各产业的收入弹性和生产率上升率的变化趋于平衡，巨涨落逐渐减弱，最后达到新的产业结构的平衡，这时巨涨落消失，仅存在着围绕新的产业结构平衡的微小波动。

在这整个的过程中有两个特点，即收入弹性和生产率上升率的传递方向。

收入弹性往往是单向传递的，就是说，首先达到或超过临界水平的自发微涨落，不仅可使尚未达

到临界水平的微涨落达到临界水平，还可提高原有产业的收入弹性。如高收入弹性的汽车产业的萌生和发展可以提高石油产业的临界收入弹性。

但是，生产率上升率的传递则是双向，因为高收入弹性产业的生产率要想不断提高，有赖于与之相应的产业的生产率的提高。

认清这两个特点对于宏观产业政策的制定很有用处。

7_5 宏观产业政策的原则——自组织控制

以上我们讨论了分工、分业的自组织过程，那末，宏观经济的决策者还有什么事情可干呢？要明了这一点，必须深入分析上述两个临界条件。

就收入弹性而言，可说的不是很多。因为需求是一种客观的东西，它是很难加以控制的。例如，我们既不能在人们收入很高的时候让人们去吃粗粮，也不能在人们收入很低的时候去推销耐用消费品。

但是，有三点是值得指出的：第一，对不同产品的收入弹性进行预测，这有助于正确地制定宏观产业政策；第二，在适当的时期对消费进行鼓励和

诱导，有助于促进经济的进一步发展和增长；第三，当若干不同产品的收入弹性都超过了临界水平并且大体上相同时，扶助这个产业、抑制那个产业，或采取相反的做法可能会导致形成不同的产业结构。前两点是易于了解的。对于第三点，不同国家的产业发展过程颇有差异正表明了这一点。例如，英国工业现代化的起点是纺织工业，而美国、法国却是铁路。又如，小汽车是高收入弹性产品，西方发达国家曾依靠小汽车工业带动了钢铁、机器制造、石油等部门的发展，但从现代观点看，它同时又带来了城市污染、道路拥挤等副作用。因此，在我国，如果不发展私人小汽车，而代之以新型的公共运输系统，那末随之而产生的服务系统和产业结构都会与前者有所不同。

就生产率上升率条件而言，值得认真加以分析的，是与它的双向传递特点有关。前面说过，生产率指的是各种资源（包括人力、资金等）的综合生产率。因为任何新的分工分业的发生，都要以一定的资源利用为基础。这里大体有两种可能的情况：

第一，新形成的经营项目和新萌生的产业所利用的资源，没有超出原有结构的资源利用范围。比如，耕地上多种经营的发展，新经济作物的引进和

发展，同粮食和原有经济作物的生产，都要利用同一范围内的土地、肥料和劳力。在这种情况下，新的项目和产业必定和原有结构处于某种竞争的关系中，而新结构只有改进旧结构对资源的利用方式，才能争得自身的生存空间。即使做到了这一点，它的成长条件一般也比较严峻。

第二，新的经营项目和新的产业开辟了新的资源利用途径，扩大了原结构的资源利用范围。在这种情况下，分工涨落的幅度更容易提高。

可见，改进资源利用方式、扩大资源利用范围，是分工微涨落在宏观成形的起码条件。否则，微涨落一定会衰减下去。因此，资源利用状况极大地制约着分工涨落的幅度。

资源的利用状况与综合生产率的高低有直接关系。在不同的新项目、新产业之间，综合生产率是很不相同的。农村目前的剩余劳力、剩余资金同开发性自然资源的新组合尽管千变万化，但基本趋向则是集中稳定在高生产率的项目和产业上。因此，综合生产率制约着分工涨落的变动方向。

分工涨落可以因为本身连锁变化的结构不同而有着完全不同的命运。比如，在我国农村目前的条件下，养猪专业户究竟能有何种规模的发展，与复

合饲料的供给就直接相关。我们知道，养猪专业户最初产生的时候，与有无技术能手、有无经营把握及一定数额的本钱等条件有关。这些条件由哪些农户能够凑合起来，微涨落能达到多大规模，完全是随机的、偶然的。但是，如果有一批农户变成养猪专业户，则要考虑这一批养猪专业户能不能有稳定的发展前途。这时，若仅仅考察每个专业户本身的努力就不足了，而必须涉及宏观养猪条件的状况。例如，在所考察区域的范围内，复合饲料加工业达到什么规模，有多大的发展前景。假定某地区转化为年投售肥猪20头的养猪专业户，必定要越过年供应复合饲料5,000斤的临界点，那末该地区若无1,500万斤复合饲料的供给条件，就肯定不足以支持3,000个够标准的养猪专业户，达不到以专业化形式生产60,000头肥猪投售市场的水平。如果有3,000个以上农户不顾宏观条件的限定，在年初转向养猪专业户，那末到最后，“专业户”运动总要衰减下来，缩减在3,000户的规模内。反过来，如果养猪专业户在经济上的作用是如此强大，足以刺激复合饲料加工业冲破原有的宏观产业平衡，而与专业户保持同步增长，饲料加工又刺激饲料种植、饲料运销的相应增长，饲料种植进一步刺激饲料良

种服务业的增长，饲料运销则刺激贮藏、加工的发展。这样，我们就可看到养猪专业生产的带头作用，看到一种专业生产如何引致一条长长的分工链条。

在这个链条中任何一个环节的脱节，都将使某个产业的生产率及产业群的生产率的上升受到影响。而那种仅靠市场来作出的反应，将会延滞巨涨落到来的时间，增加微涨落向巨涨落推移的摩擦，降低放大倍数。如果我们能对这些加以宏观政策的引导，例如，降低某些高收入弹性产业的税率，对其提供低息长期的贷款和优先进行技术改造；提高某些低收入弹性企业的税率，以使资源从后者更快地移向前者；采取经济的办法鼓励为高收入弹性产业生产代用资源的企业的萌生等等，就可使分工连锁在时空上更好地协调，减弱微涨落转化为巨涨落的摩擦，提高放大倍数，也就相对地降低了临界水平，使巨涨落更易发生。所有这些措施都是旨在提高生产率的上升率。在这方面，战后日本政府的产业政策就是突出的实例。这说明政府和宏观经济政策的调节者有很多重要的事情可干。

但应该强调的是，所有这些调节的原则是：要善于利用微涨落去推波助澜，而不是随意限制、压抑自发的微涨落；能正确估计收入弹性；对各个环

节的科学认识及正确地协调各种作用。正确的产业政策可以促使巨涨落更快来临，而错误的产业政策则有可能扼制那些很有希望的主导部门的产生。

由于我国农村生产力发展极不平衡，在不同的时点上，各个区域中收入弹性大的项目和产业极不相同，因此能够充当带头项目和带头产业的也一定不尽相同。在价格机制健全的条件下，比较不同项目和产业的收入弹性，确立先发展的项目和产业，并据此对分工涨落做出判定还是容易的。而在价格机制不健全的情况下，判断和决策都要困难得多，需要经过某种换算的办法，如应用影子价格技术提供根据。但无论如何不能忘记这个分工趋势的判定法则：新的分工、分业仅仅自身从原有的分工体系独立出来，还远不能保证不被衰减；只有选择了收入弹性比较大，能够引起较强烈分工连锁反应的微涨落，才能突破新分工结构产生的临界点，演化成在宏观上稳定的新分工结构。

7_6 无涨落机制的分工分业的教训

由微涨落向巨涨落演化的分工、分业机制，是

经济系统健康发展的一条重要的自组织规律。在宏观经济决策中按经济规律办事，除了要强调经济效益原则外，还特别需要考虑这一条自组织规律。然而，在社会经济活动中也有不循此而行的分工、分业，其结果往往是经济发展的缓慢、徘徊以致停滞。这种无涨落机制的分工、分业，也正是我国实行联产承包责任制以前农村分工、分业长期停滞的重要原因。为此，总结一下这方面的历史教训是很有必要的。注意，这里说的“无涨落”是这样的涵义：并不是没有涨落——前面说过，这是根本不可能的，而是涨落的类型很少，且幅度被强行限制得很低。下面都是在这种意义上使用这个概念的。

缺少涨落机制，农村的分工、分业似乎也能进行。但这时的展开模式，一是缺少更多的选择，二是没有亦此亦彼的过渡。于是，农业内部各工种、各生产环节的独立和分化，新产业的确定，非农人口的产生，界限都绝对分明，非此即彼。决定一旦做出，分工、分业实际就只能向一个方向前进。那末，这种无涨落机制的分工模式是怎样推进分工、分业发展的呢？从我国农村以往的实际情况来看，大体上依靠了以下三个环节。

第一个环节，叫无充分选择的定向。一个社队

内部，哪些劳动可独立、可“专业化”，发展什么新项目、新产业，基本上不是在各种选择和尝试中决策，而是唯一地由与生产者和消费者距之甚远的决策者决定。由于没有分工涨落将各种可能性充分地表现和显示出来，发展方向“必然地”只有一种。在这样的决策背景下，经营者缺少探求合理分工的动力，决策者缺少合理分工的信息；这样，完全不顾经济规律、无视资源和生产条件以及消费需求的特点、盲目照搬别地别处分工模式的作法就蔓延开来。

第二个环节，叫有进无退的秩序。分工、分业一旦经过充分选择的定向而发生，立刻就用种种办法巩固下来：农业内部的分工活动采取新的报酬办法；非农业人口的产生则经过办理著名的“农转非”手续加以固定。甚至在新的分工、分业发生之前，这类凝固化的做法就已先行一步了，比如先办理离农手续，才有非农业人口的出现。这样，不论新形成的分工、分业经济效果如何，总被有进无退的秩序巩固下来。无充分选择定向失去随时受经济过程检验的机会。同时，凝固化的秩序产生较大的滞后作用，如常见的那种一旦跨过“农转非”的桥梁，绝少再有向后转的情况。无涨落分工的秩序维

持着比较呆板的结构平衡。

第三个环节，是强制性调节。当有进无退的秩序凝固了无充分选择的定向，农村的分工、分业发展同实际的经济运动不相适应以至背道而驰时，只有积累到比较严重的地步才可能被发现。但即使发现了，分工运动本身也没有调节它的力量。经济主体只得诉诸非经济的强制性调节来解决问题。例如，下达行政命令取消新项目、新产业，指令非农人口重新转成农业人口，等等，以期恢复旧有的平衡。这类强制性调节不能对随机产生的新矛盾作出随机的处理，只能在矛盾积累到一定程度时才被迫做出总的解决，因此调节过程必定伴随着较大程度的振荡，“学费”高昂。

在经济活动比较简单，农村分工、分业的环境比较单纯的条件下，无涨落机制也能在一定程度上促进农村分工、分业的进展，无充分选择的定向不易发生错误，有进无退的秩序看不出有什么太大的坏处，强制性调节无须频繁发生。

但是，在需求结构有了较丰富的变化，科学技术提供了更多的分工可能性，从而在农村分工、分业内部的冲动和外部的吸引两方面，都引入了更多相互作用的经济因素之后，无涨落机制的分工模式

就日益表现出它的无能。几乎同通常的想象截然相反，分工涨落在经济有机体处于低级发展阶段中的重要性，比之在高级的发展阶段中的重要性，要稍逊一筹。

企图用无涨落分工对付复杂环境，首先是无选择定向决策的失灵：四面八方似乎都提供新的发展机会，但各种结果却难以事先加以测定，因而作出错误决定的可能性大大增加。更有意思的是，即令作出一个正确的决策，也无从担保它是最优的或近乎最优的。因为在复杂性增大的环境中，不同的分工、分业可能产生的连锁经济效应大不相同。每个生产经营单位在一组分工、分业可能性中唯一地决定了一种，那末其他几种可能性不仅失去了分别单独地表现经济效益的机会，而且也失去了这些被舍弃的可能性互相碰撞、产生更大经济效益的机会。有关分工连锁效应的问题我们在后面还要提及，这里只须指出，在复杂环境下，无选择分工、分业的定向，会因决策者难以估量多种后果而丧失许多机会。

有进无退秩序的维系，主要弊病是适应不了经济运动变化率增大的要求。某一种分工、分业，当它合乎需求结构同供给结构的要求而被巩固下来，

并无什么坏处。但是，社会的需求同技术结构都在连续变化之中，新的不适应总要产生，呆板的平衡秩序就必定带来阻滞和摩擦。例如，对某种产品急剧上升的需求，召唤出一定数量的专业劳动者从事专业生产，假如这种产品是非农业产品，那末这批农业劳动者就要转为非农业劳动者，得到商品粮供应、并有了非农户口，等等。但是，当这一需求由于结构性变动衰减下去之后（或者不再需要，或者被互替产品取代），这批新分离出来的专业劳动者就会由于一整套凝固做法而无法挥之即去，其时即令农业领域——他们由以独立出来的母体，有了重新吸收他们的要求，通常也不被理会。在许多社队企业的经营中，即使没有商品粮和转户口的问题，也有固定工分或半固定工资的滞后作用。那里的经营人员常常为产品销路不稳所引起的企业窝工而苦恼。

在复杂的环境下，无涨落机制的分工只好诉诸强制性调节，而且频率越来越高，振荡幅度越来越大。它的危害性和后果表明，农村分工、分业模式再也不能在复杂的经济环境中生存和发展了。一般说来，传统农业向现代农业的转折同时也就是简单的近似封闭的经济系统变成复杂的开放系统。毫无疑义，现代化首先意味着农村分工、分业旧模式的

根本变革。

从我国农村具体的历史过程看，五十年代中期之前，我们建立了初步具有涨落机制的分工、分业方式。但是，后来就发生普遍的逆转，代之以无涨落机制。1958年对农村工业（特别是炼钢业）和农村食堂业的判定和大发展决策是全局性的严重失误。1962年两千万人口重返农村是极为正确的决定，它实行的方式就是强制性调节。然而，从此以后，有进无退的秩序在宏观上表现出它的反面，即非农人口从广义农业中分离出来的速度大大减缓了。到了十年动乱中，极左思潮干脆崇尚对分工、分业的反动，将大批非农人口编入农村“就业”的行列，提倡城镇居民“不在城里吃闲饭”，等等。其间丧失的微观分工、分业的机会数不胜数。整个过程最严重的后果还不仅是对当时生产力的破坏，而是整个农村分工格局的僵化。

在这种深刻的历史教训中，有两点特别值得记取。

第一，不加分析地把一切自发的微涨落一概说成是盲目性的活动而加以尽量排斥，结果就无视了分工、分业发展的自组织过程的特点，抹杀了系统发育过程的基本环节。现在我们应该清楚地看出，

这种自发性的微涨落的存在虽然具有盲目性，但却是进行正确选择、降低决策失误的前提和条件，也是避免因决策失误而造成严重后果所必须付出的代价。很多在所谓“计划性”掩盖下的集中性的分工决策，使得我们丧失了在充满着不确定性的环境下进退自如的能力，从而付出了极为沉重的代价。

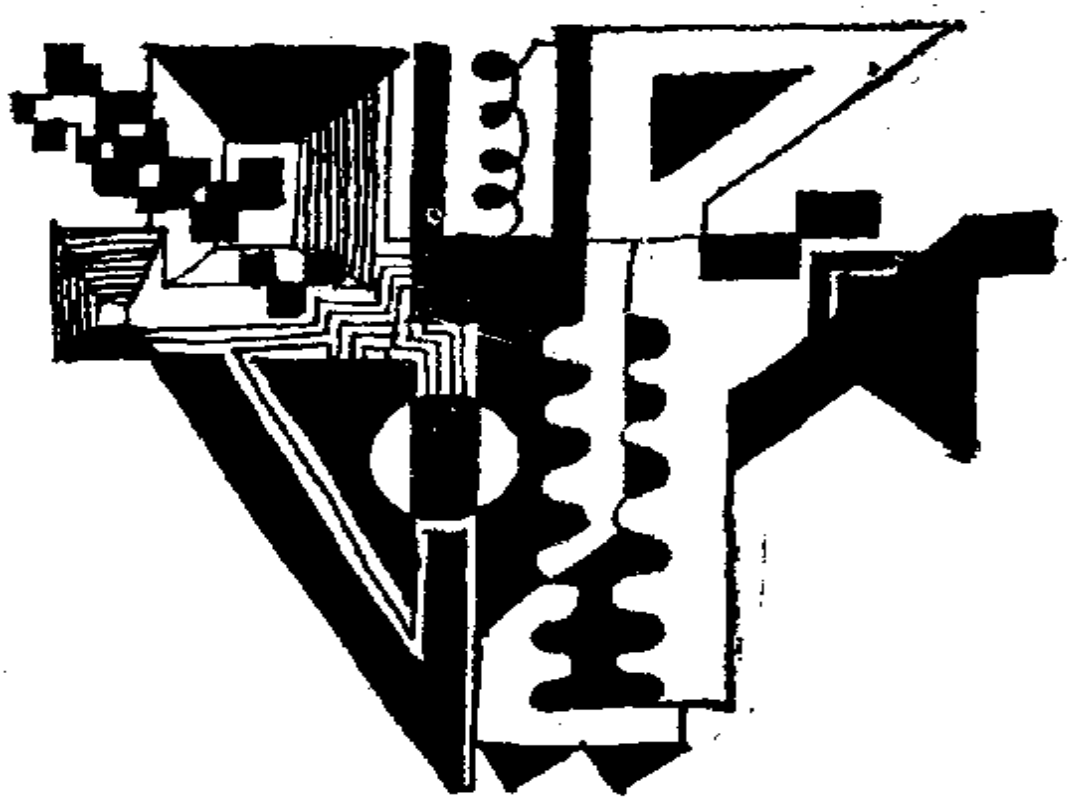
第二，由于价格体制的僵化，使得整个信号系统失灵，造成微涨落失去方向，不能彼此互相协调。关于这一点，在当前尤其值得注意。自党的十一届三中全会以来，我国农村广泛实行了联产承包责任制，使农村形势发生了根本性的好转。这种可喜的发展趋势有一个突出的特点，即微涨落种类大大丰富起来，涨落幅度大大增加。用通常的话说，就是调动了各种积极因素，搞活了经济。联产承包责任制这一政策之所以能够突破一点，震动全线，扭转了长期以来农村的被动局面，关键还在于它看到了系统发育的自组织过程的特点，并实行了在自组织的基础上进行组织，在自调节的基础上进行调节的正确原则。但是，随着农村形势的进一步发展，农村与城市、工业、商业、财政、价格等方面的接触越来越密切，这就产生了一些新的问题。以下我们就此作简要的分析。

在第六章中，我们已经看到，在耗散结构的形成过程中，大量个体的相干协作状态起了重要的作用。这里我们则要指出，当协作作用力为正时，可促进系统内部各子系统、各元素之间的协作作用，有利于耗散结构的形成。可是，当协作作用力为负时，反而破坏了系统内各子系统、各元素之间的协作作用，造成系统的混乱程度或无序程度增加。这个判断对于我国目前的实际经济情况有着重要的意义。当前，我国不少行业、不少产品之间发生失调，亟待调整。究其原因，正是价格体系的混乱所致。价格体系混乱造成价格信号失真。而价格信号失真的主要表现是，初级产品价低，制成品价高，初级产业亏本，加工业利润大。这就造成争相搞加工，无人办原料。这是一种典型的负的协作作用力，其结果是大量的加工厂办起来，但吃不饱，停工待料，造成日益加剧的“瓶口”现象，使得整个经济系统的总熵增加，无序程度加大。其程序如下：信号失真——→负的协作力——→系统总熵增加。

实际上，如果信号不失真，则正的协作力可以自行解决很多刚刚形成的瓶口现象，而不致使其积累起来。因此，信号系统失真（信号失真实际上是一种干扰，这本身就是正熵）的情况如不解决，将

会对目前形势的进一步发展造成相当不利的影响，应该引起我们足够的重视。这就是我国的现行价格体系亟待改革的重要原因。

从某种意义上说，一个民族生产力的发展标志，就是它所能达到的分工的水平。而它有多大的发展潜力，则取决于选择什么样的分工模式，以及包含于分工模式中的何种机制。中国农村极其低下的分工、分业水平，并不只限于起点太低这一历史性原因。更深刻的根源还在于，它没有把能够缩短与当代先进的社会化分工水平距离的运行规律，贯彻到宏观、微观发展的各个层次中去。这个规律并不神秘，它就叫**“分工涨落”**。



第八章

产业兴衰的数学分析

8_1 分工分业的分支点

前面的分析，主要结合的是我国近年农村的实践，但是，对于农村分工前景的预见，总在一定程度上要超出经验的范围。为此，我们尝试运用一些新的科学成果，来建立农村分工、分业前景的理论示意模型，以求描述得更加清晰，更易得到实践的检验；同时，也为进一步研制精确的理论模型和应用模型，确立农村发展的产业政策提供基础。

农村分工、分业的总图景可用分支数学理论来

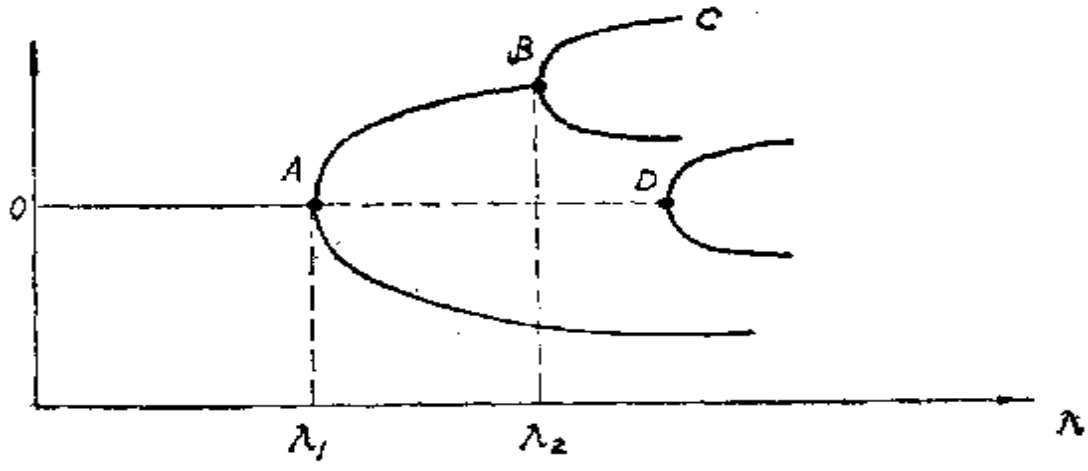


图8.1　分支图

描述（见图8.1，横轴度量临界值，纵轴表示系统的结构）。

分工、分业即是一个“分叉”过程。一般地讲，当 $\lambda<\lambda_1$ 时，也就是当新产业的收入弹性和生产率上升率低于临界收入弹性和临界生产率上升率（这两个临界点合称 λ）时，原有分工结构的平衡是稳定的，不会被分工、分业的微涨落所打破，微涨落只能不断发生但又不断被衰减。但是，当新产业的收入弹性和生产率的水平高于临界水平时（即 $\lambda\geqslant\lambda_1$），原有的稳定分工结构（从O点到A点这段）就变为不稳定的了（图中A点到D点的虚线），微涨落再也不能被衰减，系统再也不会回到原有的平衡态。这时它可以走上上一分支（AB），也可以走上下一分支。这两个新的稳定分支被中间的不

稳定线分开了，究竟走向哪一分支要看大量微涨落中哪些微涨落有最快的增长，或者要看我们的产业政策有助于加速哪些微涨落的增长。例如，有两个新产业都达到了临界水平，如果采取某种产业政策使第一个新产业有最快的增长，这样就以它为中心诱生出一系列的分工连锁效应，并形成一种新的宏观稳定分工结构（设为上一分支）；若采取另一种产业政策，则走上下一分支。为了方便起见，不妨认为下一分支对今后产生更多的机会不利。从图上可直观地看出，当 $\lambda \geqslant \lambda_2$ 时，若已走上上一分支，则会有更新的分支点 B，这样又可以使宏观产业结构发生新的变化；但若已走上下一分支，就不会有这种机会了。这就是人们所说的“机不可失，时不再来”，“一步顺，步步顺”。因此，在机会成熟时，或处在分支点上时，妥善地选择产业政策，对于促进不断加速的良性循环有着不可低估的作用。这是因为在分支点上，有多种前途可供选择。

这种分支图是最简单的一种，即二分支。类似地，还可以有三分支、四分支等。

出于促进分工、分业的发展，我们集中讨论AB段。

图8.2 旧分工结构向新分工结构的演化过程

先把第七章中所说的从微涨落向巨涨落过渡的机制总结如图8.2。

微观结构的涨落最初发生在OA线周围，涨落不断被衰减（见图8.3），此时分工涨落离平衡点不远，由于涨落幅度没有超过临界水平，因此系统状态不断回到原有的平衡点（这时该点是稳定的平衡态）。

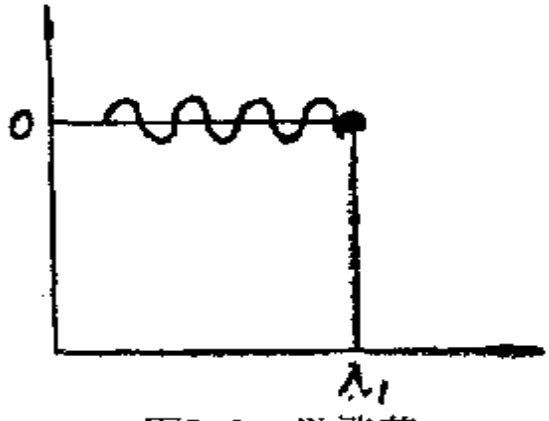


图8.3 微涨落

但是，在改变了的条件下，微涨落则可能远离平衡点，使原有的稳定的平衡点变成不稳定（即失稳），这时涨落就不会再回到这个原有的平衡点上，而走向新的稳定分支。

这样，我们就得到了对分工、分业演化的动态说明，呈现在我们面前的模型具有一个“活”的结构，不平衡成为新分工体系产生的有序之源。

8_2 一个部门的增长模型

为了对上述理论模型进行数学描述，我们先假定已有了一个生产部门，然后再看新产业是怎样产生的，并从中分析新产业和旧产业之间的关系。

当一种新产品刚刚开始出现时，生产的技术方法还不够完善，生产费用较高，该产品的市场需求还较小，所以生产发展得比较缓慢。但这却表明新的技术是可行的，并且显示了在有利可图的价格水平上，公众也愿意购买这种新产品。此后，在第二阶段，仿效的人涌入新的产业，投资和工厂能力增加很快；由于生产方法的完善和转向批量生产，成本下降幅度较大，使得该产品的市场日益扩大，产量按日益增长的速率提高（超过临界点，加速）。接着进入第三阶段，这是一个市场的饱和时期：随着收入的增加，该产品的收入弹性降低，于是产量增长就变得越来越缓慢。到了最后，几乎完全停止增长，产量稳定在仅够用于更新的水平上。以上几个阶段示于图8.4。

任何一个具体的产业都大致经历过这样一个三

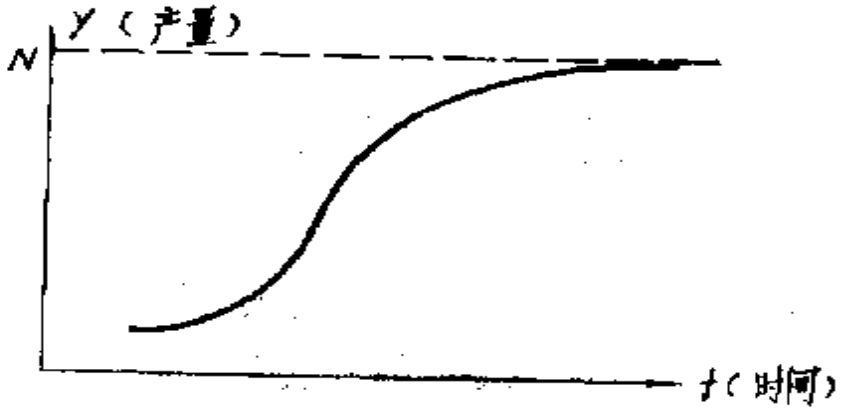


图8.4 产量的罗辑

部曲。显然，如果没有新产业形成，整个分工图景和经济增长就将长期停滞不变。

上述曲线的微分方程是：

$$\frac{dY}{dt} = KY(N - Y) \qquad (8.2\text{-}1)$$

其中：产量Y的增长速度用$\frac{dY}{dt}$标示。等式右边的涵义是：产量的增长速度$\frac{dY}{dt}$与下面两者成比例，即(1) t 时的产量Y，(2)饱和水平与这个值的差$(N - Y)$。N 代表饱和水平，称为饱和参数。这里$K>0$，它是产量的增长速度$\frac{dY}{dt}$与Y和$(N - Y)$的积之间的比例系数。

显然，饱和参数N的大小与收入弹性的高低密切相关。系数K的值与生产率上升率的高低密切相关。图8.5(a)、(b)表明K值相同、N值不同($N_0<$

N_1）时的增长情况；（c）、（d）表示N值相同、K值不同（$K_1 > K_2$）时的增长情况。

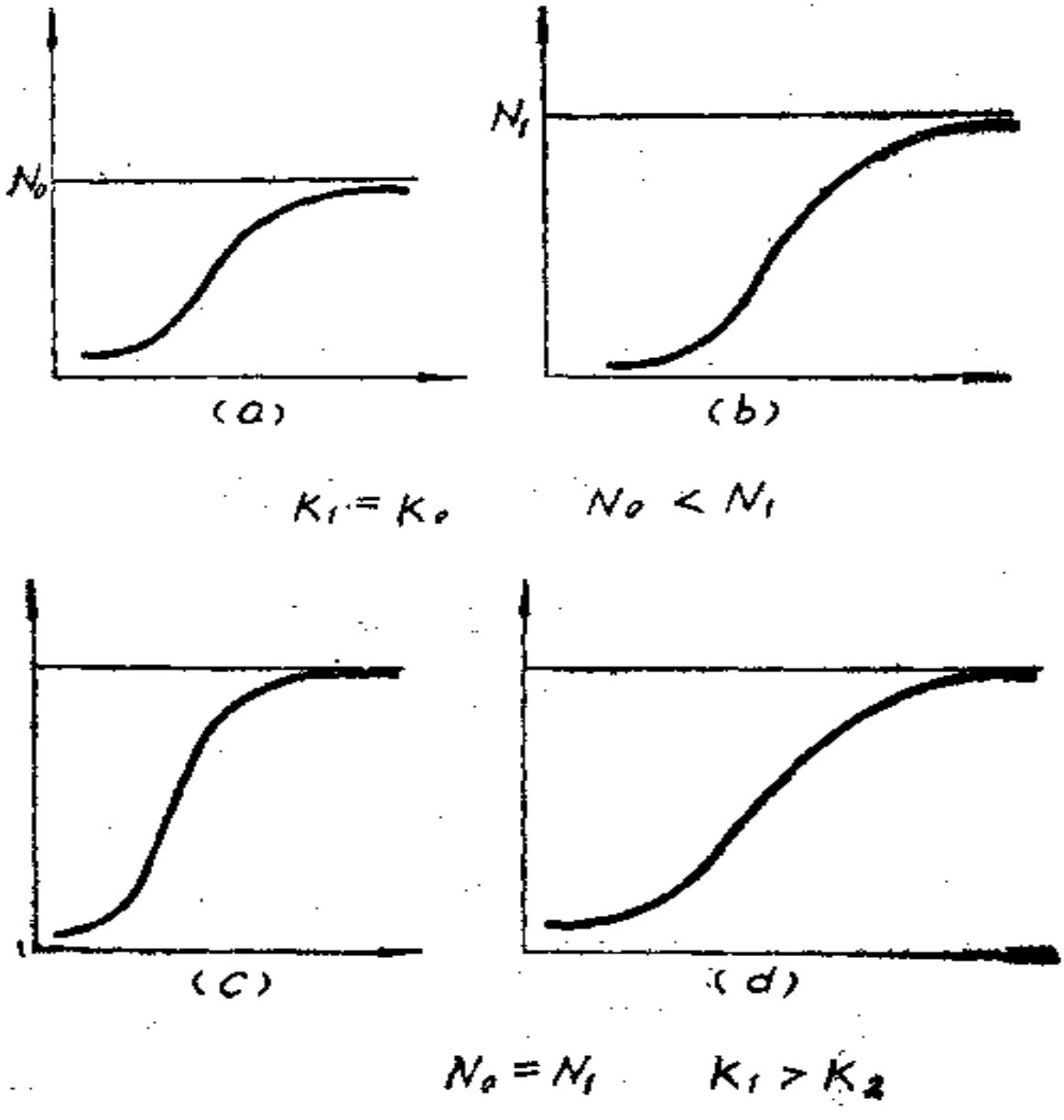


图8.5 N、K之值对曲线的影响

随着时间 t 而增长的因子Y 称为动态因子。因子（N－Y）则称为减速因子，因为这个因子的量随时间推移而减小。当一个产业的扩张过程接近饱和时（即 Y的值接近N 时），减速因子（N－Y）就接近于零，于是增长速度$\frac{dY}{dt}$也趋向于零。这时，该产业的扩张开始停止，即产量开始稳定在 Y = N附近。

8.3 新产业的产生及产业结构的变化

现在考察在有限资源的情况下，新产业是怎样产生的。

首先将上述方程(8.2-1)修改如下：

$$\frac{dx_i}{dt} = K_i x_i (N_i - x_i) - M_i x_i \qquad (8.3\text{-}1)$$

这里新添加的一项是$M_i x_i$，它表示的是产业1的一件产品使用时期的长短；使用的时间越短，（相当于M_i越接近于 0 ）就要有更多的产品用于更新，以补偿被消耗掉的产品。

显然，这时的饱和水平不再是N_i，而是$N_i - \frac{M_i}{K_i}$。这是因为在饱和水平时，增长速度$\frac{dx_i}{dt} = 0$。而设在饱和水平时的产量为x_i^0，则有：

$$\frac{dx_1}{dt} = K_1 x_1^0 (N_1 - x_1^0) - M_1 x_1^0 = 0$$

$$N_1 - \frac{M_1}{K_1} = x_1^0$$

这时整个产业向稳定的状态 $x_1^0 = N_1 - \frac{M_1}{K_1}$ 移动。这种状态代表着正在生产出来的和正在被消耗掉的x_1之间的一个动态平衡。

现在假定由于某个“偶然事件”（如某个农户弃农养花，成了养花专业户），在某瞬间产生了一个新个体 2，它的数量为x_2，这是原有平衡的产业结构中的一个偶然变异——微涨落。过了一些时间，可能有足够数目的x_2存在，那末就可以用下述方程去描述它们的增长或消失：

$$\frac{dx_2}{dt} = K_2 x_2 (N_2 - x_2 - \beta x_1) - M_2 x_2 \qquad (8.3—2)$$

产业X_2可以具有参数K、N、M的不同值（在这里我们以参数K、N、M表征一个产业，一个变异导致一个产业，它对于这些参数具有不同的一组值。注意，在我们所讨论的模型框架中两个具有同样值N、K、M的产业将是不可区别的）。此外，还可以开发不同的经济资源，这可由引入因子$\beta(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$来表达。如果$\beta = 1$，则新产业$x_2$与老产业$x_1$

一样，精确地使用着同一资源；如果$\beta=0$，则表示它们使用资源完全不同；如果$0<\beta<1$，则表示在资源使用上有重叠的部分。

这样，对于整个系统，方程不再是(8.3—1)，而是下述方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=K_1x_1(N_1-x_1-\beta x_2)-M_1x_1\\[2ex]\dfrac{dx_2}{dt}=K_2x_2(N_2-x_2-\beta x_1)-M_2x_2\end{cases}\qquad(8.3—3)$$

在突变个体出现的瞬间状态是：

$$x_1^0=N_1-\frac{M_1}{K_1}\quad\text{和}\quad x_2^0=0\qquad(8.3—4)$$

该系统对突变个体的这一小量的响应是决定论的，并且可以精确地用微分方程的方法计算，以建立其特征方程的根具有正实部的条件。这就是“增长”（原产业的产量增加）以及新分工、分业“进化”步骤发生的条件。

如果：

$$N_2-M_2/K_2>\beta(N_1-M_1/K_1)\qquad(8.3—5)$$

那末，突变产业的产量将增长到某个有限值，并占有系统中的“小经济环境”。

下面具体分析几种可能发生的情况。

第一，如果新产业x_2是一个突变个体，它精确地占据与x_1完全相同的“小经济环境”——经济资源，则$\beta=1$。同时不难证明，如果：

$$N_2-M_2/K_2>N_1-M_1/K_1 \qquad (8.3-6)$$

那末x_2增长并将完全取代x_1〔(8.3—6)式无非是说，若N_2——反映产业x_2的收入弹性参数与K_2——反映产业x_2的生产率上升率参数的综合值比N_1和K_1的综合值大，不妨假设$M_2=M_1$〕。这时，整个系统向着$x_1^0=0$和$x_2^0=N_2-M_2/K_2$运动，产业x_1走向衰亡。这时，原有的平衡态x_1^0被打破，新的稳态x_2^0建立起来。反之，若$N_2-M_2/K_2<N_1-M_1/K_1$，则新产业x_2将被抑制，微涨落趋向消失，系统恢复到$x_1^0=N_1-M_1/K_1$和$x_2^0=0$的原始平衡状态。

当新产业取代旧产业时（见图8.6），不难得出一个结论：进化将导致资源开发的稳定增长，每一资源带所具有的产品数量将增加——这无非是新产业能更有效地利用资源，从(8.3—6)式也可看出。因为$x_2^0=N_2-M_2/K_2>x_1^0=N_1-M_1/K_1$，同样的资源所生产的新产品的数量$x_2^0>x_1^0$——原来产品的数量，因此进化具有上图的形式。$x_2$完全取代$x_1$的那一段与棉纺工业取代手纺业非常相似。这

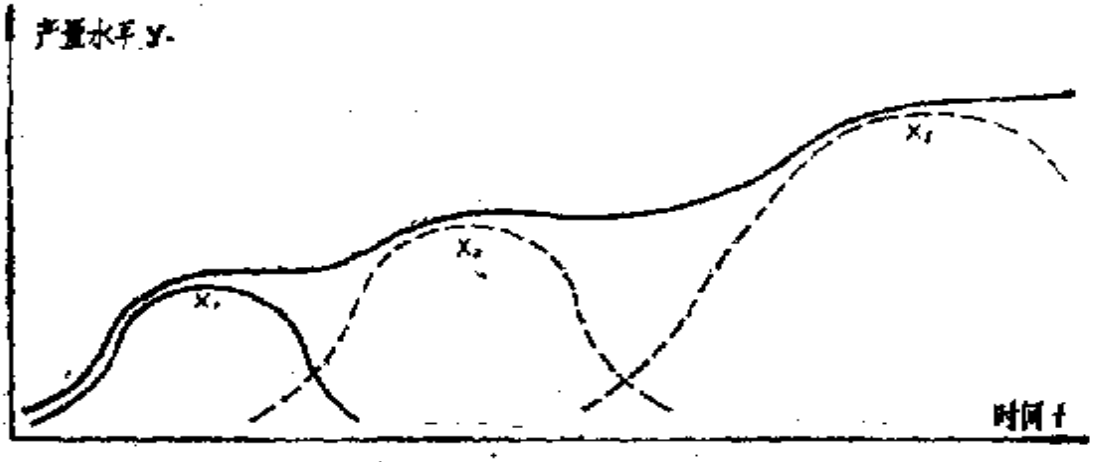


图8.6 完全替代的分工进化图景

是一部在资源上具有完全竞争、在产品上完全替代的产业兴衰史，是一幅适者生存、劣者淘汰的“残酷无情的”分工进化图景。

第二，新产业x_2可以在其资源的选择上不同于旧产业x_1，而且是开发一个完全不同的小经济环境，此时$\beta=0$，这样，x_2的成长条件由下式给出：

$$N_2 - M_2/K_2 > 0 \qquad (8.3-7)$$

这样一来，如果x_2在这小经济环境中能生存下去，那末它将增长到一个稳定的产量水平$x_2^0 = N_2 - M_2/K_2$。这个水平完全取决于它的收入弹性参数N_2与生产率上升率参数K_2，以及产品的使用寿命参数M_2。并且，这时x_2与x_1和平共存。这是一种资源和产品完全独立、互不相干的分工进化图景。

由于 $x_2^0 + x_1^0 = N_2 - M_2/K_2 + N_1 - M_1/K_1 > N_1 - M_1/K_1 = x_1^0$，所以这时我们又一次发现，分工进化导致对环境和资源更完全的开发。同时，平衡态从x_1^0过渡到$(x_1^0 + x_2^0)$。

第三，资源使用有重叠部分的情况，这时 $0 < \beta < 1$。这里还有两种情况：

1.如果：

$$N_2 - M_2/K_2 > \beta(N_1 - M_1/K_1) \qquad (8.3—8)$$

$$\beta(N_2 - M_2/K_2) > N_1 - M_1/K_1 \qquad (8.3—9)$$

那末，产业x_2取代x_1，且最终的产量水平将高于原来的$N_1 - M_1/K_1$。这是容易理解的，(8.3—8)式就是(8.3—5)式，这时新产业x_2将增长到某个有限值。若还有(8.3—9)式，则由$\beta < 1$可得出：

$$(N_2 - M_2/K_2) > \beta(N_2 - M_2/K_2)$$

$$N_2 - M_2/K_2 > N_1 - M_1/K_1$$

这就与(8.3—6)式相同了。这是一幅资源部分竞争、产品完全替代的分工进化图景。

2.如果：

$$N_2 - M_2/K_2 > \beta(N_1 - M_1/K_1)$$

$$\beta(N_2 - M_2/K_2) < N_1 - M_1/K_1 \qquad (8.3—10)$$

那末，x_2将增长，但与x_1共存，且最终状态可表示为：

$$x_1^0 = \{N_1 - M_1/K_1 - \beta(N_2 - M_2/K_2)\}/(1-\beta^2)$$

$$x_2^0 = \{N_2 - M_2/K_2 - \beta(N_1 - M_1/K_1)\}/(1-\beta^2)$$

总的产量水平为：

$$x_1^0 + x_2^0 = \{N_1 - M_1/K_1 + N_2 - M_2/K_2\}/(1+\beta) > N_1 - M_1/K_1$$

这是一幅资源和产品部分竞争的进化图景。

总之，我们发现，新的分工、分业要能够站得住，只能是对环境和资源更大开发的结果。同时，这也意味着新的分工结构取代了旧的分工结构。

8_4 分工的连锁效应

现在，我们可以把上面的模型加以修改，用它来说明产业分工的连锁效应。

前述的模型只说明了新产业诞生的三种情况：完全竞争替代；完全独立共存；部分竞争替代或部分竞争共存。从典型的情况来看，产业分工的连锁效应是一种结合互补共存的分工进化图景。例如，对农用汽车的需求增长，将导致对石油的需求增长。

我们假定生产汽车的资源与生产石油的资源完

全不重叠。若重叠，则说明两种产业的产品是结合互补的，而两种产业所占用的资源是部分竞争的，这时可用第三种情况的第(2)种类型来处理。因为汽车的生产若完全取代了石油生产——第三中的(2)，则汽车产业也绝对不可能独立存在下去了。因此，只需把第二种情况的模型稍加修改即可。设x_1为石油产业，x_2为汽车产业，并设$\beta=0$，当汽车产业还没有萌生时，系统的方程为：

$$\frac{dx_1}{dt}=K_1x_1(N_1-x_1)-M_1x_1 \qquad (8.3—11)$$

这时，石油产业的各项参数为K_1，N_1，M_1。由于汽车产业的萌生和发展刺激了对石油的需求，使石油产业的收入弹性得以提高，并要求石油产业提高生产率，这样方程(8.3—11)就变为：

$$\frac{dx_1'}{dt}=K_1'x_1(N_1'-x_1')-M_1'x_1'$$

由于$K_1'>K_1$，$N_1'>N_1$，且假设$M_1'=M_1$，便有：

$$N_1'-M_1/K_1'>N_1-M_1/K_1$$

于是，整个系统的方程就不是(8.3—11)，而变为：

$$\frac{dx_1'}{dt}=K_1'x_1'(N_1'-x_1')-M_1x_1'$$

$$\frac{dx_2}{dt_1} = K_2 x_2 (N_2 - x_2) M_2 x_2$$

这样，整个系统就离开了原有的平衡态x_1^0，而向着新的平衡态$x_1'^0 = N_1' - M_1/K_1'$和$x_2^0 = N_2 - M_2/K_2$运动。总产量（用价格作单位）为$x_1'^0 + x_2^0 = N_1' - M_1/K_1' + N_2 - M_2/K_2$。不难看出，由于石油产业受到汽车产业兴起的推动，石油产业的新的稳定的产量水平为$x_1'^0 = N_1' - M_1/K_1'$，它大于原有的产量水平$x_1^0 = N_1 - M_1/K_1$。就是说，不仅新的总产量水平$x_1'^0 + x_2^0$大于原有的总产量水平x_1^0，而且新的产业结构中既有的产业的产量水平，也大于它原来的总产量水平。

这里虽然处理的是两个产业的情况，但也可以推广到具有n个老产业和m个新产业的分工图景中去。

从以上的分析不难看出，宏观产业政策的核心问题在于：利用各种政策手段影响各种不同产业的参数K和N的值，协调不同产业之间的资源分配和产品的关系，然后利用产业之间的自组织机制，以达到所需要的宏观产业结构。

结　语

从前述各章的分析不难看出，现代控制的方法和自组织控制的方法（或耗散结构的方法）有很大的不同，它们各自对应于不同的经济条件，反映了不同的经济控制的目的和要求。形象地说，现代控制的方法是一种常规控制，而自组织控制则是非常规控制。前者不仅要求对系统随时进行观测，而且也要求不断地对系统进行微调，以使系统的运行与目标之间的误差不致积累起来。后者虽然也要求对系统的运行进行不断地观测，但控制却是跳跃或间断地进行的，仅在某些最重要的关节点上才发挥作用，而平常则是“任其自流”的。

这两种方法虽然不同，但并不对立，也不能互相取代，而是互相补充，各有各的用处。其效果则要看我们在哪种内、外条件下，依据何种目的和要

求，怎样使用和搭配它们而定。实际上，这两种控制方式在任何一个社会经济系统的控制中，或多或少总是同时存在的。例如，在企业管理中总有些例行的管理，现代控制理论和方法对例行的管理正是适得其所，大有用武之地。而任何一个企业也总有一些处于转折关头（如转产或上一两种新产品）而非例行管理所能解决的问题，这时系统往往面临着一个或几个“门坎”（即临界），这类问题正对自组织控制理论和方法的口味，即所谓“养兵千日，用兵一时”也。至于对国民经济的管理和调节来说，这两类控制方式的不同作用更是显而易见的了。

为了更清楚地看出这两种控制方式的差别，让我们扼要地对比和总结这两种控制的特点。

现代控制理论所适用的系统具有如下的特征：

1.系统的目标是外生的，并且是给定的。所谓外生的，是指目标是控制者为被控制者（系统）确立的，而且这个目标一旦确立，在整个控制过程中就不再发生变化。如果这个目标是变化或不定的（注意：不是指目标值），那末稳定控制和最优控制就谈不上了。

2.系统的结构是稳定的和基本上不变的。显然，对于现代控制理论来说，是不能允许系统在运

行过程中自身又生出一些新的变量或新的子系统。从数学上看整个系统的方程是明确而唯一的。

3.控制方式是连续的、不变的和过程性的。这一特点是上述两个特点的必然结果：具有上述两个特点的系统一经确立，则控制方式也就可以确定了。也就是说，在控制过程中改变的仅是控制的程度，即控制变量的值，而不是控制变量本身。根据误差＝目标所要求的情况－系统运行的实际情况，不断地改变控制程度，使误差保持在一定范围内或趋近于零。

自组织控制所适用的系统具有如下特征：

1.目标是内生的和可变的。所谓内生的，是指被控系统可以自己确立目标，而控制者或者不能或者无法干预这种目标的确立，而仅能影响达到目标所需的外部条件。所谓可变的，是指这样的目标本身是不断变化的（注意：这不是指目标值的变化），今天可以是这样一组目标，明天可以是很不相同的另一组目标。

2.系统的结构是可变的。所谓结构可变是指这样一类变化：系统内可以生长出一些以前完全没有的新变量、新因素、新关系和新的子系统。

3.控制方式是间断的、变化的和临界性的。正

因系统具有上述两个特征，所以常规控制方式已失去了控制有效程度的判据，因而也就“无所措手足”了。于是，这时的控制方式必须改变为去控制影响系统在达到自身目标时所必需的内、外部条件。由于在不同的临界点或不同的转折点（分歧点），临界条件是不同的，因而影响这些不同的条件的控制方式也要随之而变。这时的控制方式分为两类：一是影响系统达到自身目标所需的条件，借以间接地使系统的目标趋向控制者所希望的目标；二是影响系统结构形成和变化所需的条件，借以间接地使系统的结构和目标趋向控制者的要求。

在社会经济的大系统中，组织和自组织、常规控制和非常规控制作为对立统一体自始至终都存在。当环境没有很大的变化，内部的动因也没有很大的变化时，系统将处于平稳的发展时期，组织和常规控制是显型的，居于主导地位；这时自组织和非常规控制则是隐型的，处在“储备”状态。当环境发生了大的变化，内部的动因也发生了大的变化时，系统自身将处于转折节点，这时自组织和非常规控制就上升为主导地位，成为显型的；而组织和常规控制则服从于前者的要求，处于不定型（甚至隐型）的变化之中。

0287027

就社会经济大系统的内部来说，不同的子系统又有不同的功能。有一类子系统主要担负组织和常规控制的职能，以保证整个大系统的发展具有一定的稳定性、延续性和有效性；另一类子系统则主要担负自组织和非常规控制的职能，以保证整个大系统随时都有应付挑战和主动抓住良机进行选择的能力。当然，这些功能相应于系统发展的不同时期有时是显型的，有时是隐型的，而且结构、功能也在不断变化之中。

不难看出，为了更有效地调节和引导经济系统，使之运行得更有效率，首先，要区分清楚组织和自组织、常规控制和非常规控制的不同特点与不同作用，不能厚此薄彼。第二，要在整个大系统中的不同子系统间正确地分派这些职能。第三，作为整个大系统的调节者，要善于区分不同的发展阶段，必须抓住当时所要求的主导方式，因势利导之。

科学和理性在人类社会发展中的任何阶段都有其难以逾越的界限，人类总要面临着某种不确定性。必须清醒地看到：盲目性在任何时期都不能降低为零，对于任何历史阶段上的人类认识，这种不

可压缩的盲目性是人类必须付出的代价——人们要探索未知领域、抓住新的机会，要想有所发明、有所前进，就不能不付出这种代价。因此，人们不是在有无盲目性中作出选择，甚至也不是在盲目性多少间作出选择，人们能够作出的真正选择勿宁说是在跨越着各种盲目性并主动承担其后果的过程中完成的。要想在一个充满着不确定性的世界中，不为犹疑所困扰，尽可能地捕捉住每个机会，必须诉诸于千百万人民群众的生动活泼的创造和实践——以这种广泛的自组织活动为基础，进行组织和调节，我们就能降低盲目性的不利后果，同时又不放过每个有利的机会。

当前，我国正在进行深刻的经济体制的改革。在这样的历史性的转折时期里，自组织和非常规控制有着特殊的意义和作用。因此，重视对自组织过程的机理与非常规控制的研究和应用，想必会多少有助于经济改革的顺利进行，使我国的社会主义经济能更加蓬勃和健康的发展。

附录A　向量、矩阵、行列式

A.1　向量与向量空间

A.1.1向量

假设某公司制造四种类型产品A、B、C和D，并设在某月内它们的销售量分别为4、10、1和5。这样，公司的销售量可以用(4 A，10 B，1 C，5 D)来表示。如果规定括号内第一个数总是指A的销售量，第二个是B的销售量，等等，那末可以把字母A、B、C、D略去，某月的销售额就可用(4，10，1，5)来表示。任何一个月(或年、季、日)的销售额都可以类似地用这样一个四元有序数组来表示。四元指有四个变量；有序指数的排列有秩序，即(4，10，1，5)与(4，10，5，1)不同。

这样的数组称为向量，上面那样的数组称为四

维向量。

在上例中，(4，10，1，5)是行向量，它还可以表示成列向量：

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

类似地，由n个实数组成的n元有序数组（在上例中，可以设想该公司制造 n 种不同类型的产品）称为n维向量：

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (A.1-1)$$

这里，x是列向量，而行向量可表示为：

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}'=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

其中，x_1，…，x_n分别为 n 维向量 x 的第一个、第二个、…、第n个分量。分量的个数称为向量的维数。符号“ ′ ”称为“转置”，在后面解释。

A.1.2 向量的运算 向量空间

对于一个向量 x 与数量（又称标量）λ，定义

x 的λ倍为：

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \qquad (A.1-2)$$

维数相同的两个向量 x 与 y 的和，定义为：

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$(A.1-3)$$

维数相同的两个向量 x 与 y 相等的定义为：

$$x = y \Longleftrightarrow x_1 = y_1, \quad \cdots, \quad x_n = y_n$$

$$(A.1-4)$$

也就是说，当两个向量的各个分量分别相等时，称两个向量相等。

对于这里定义的数乘与求和的运算，下列 A_1) — A_3) 的关系成立：

A_1) 对于两个向量 x 和 y，由 (A.1—3) 式给出的和 $x + y$，是唯一确定的。

A_2) 满足交换律：$x + y = y + x$。

A_3) 满足结合律：$(x + y) + z = x + (y + z)$。

A_4) 所有分量均为零的向量，称为零向量，如

用 0 表示，则有 $0 + x = x + 0 = x$。

A_6)使 $x + y = 0$ 的向量 y 是唯一确定的。这时，称向量 y 为向量 x 的反向量，以 $-x$ 表示，它是由数量 -1 与向量 x 的积给出的。

A_6)满足分配律，$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$。

A_7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$，

A_8) $1 \cdot x = x$。

从以上的定义和法则不难看出，对于向量可以象数那样去对它进行运算。

在(A.1—2)式中的 λ 是数域 P 中的某个数。在本书中这个数域或者是实数域（即全体实数的集合），或者是复数域（即全体复数的集合）。

定义 以数域 P 的数作为分量的 n 维向量的全体，同时考虑到定义这些向量上的加法和数量乘法，称为数域 P 上的 n 维向量空间。

在 $n = 3$ 时，3 维实向量空间就是我们通常所说的三维几何空间。

A.1.3 线性相关性

两个向量之间的最简单的关系成比例。所谓向量 x 与 y 成比例，就是说有一数 k 使 $x = ky$。

在多个向量之间，成比例的关系表现为线性组合。

定义 向量x称为向量组y_1，…，y_s的一个线性组合，如果有数域 P的数k_1，…，k_s，使

$$x = k_1y_1 + \cdots + k_sy_s$$

任一个n维向量$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$都是下述向量组的一个线性组合：

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,e_n=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因为$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$。向量$e_1$，$e_2$，…，$e_n$称为n维单位向量。

定义 如果向量组 x_1，…，$x_n(n\geqslant\Phi^2)$中有一向量可以经由其余的向量线性表示，那末向量组x_1，…，x_n称为线性相关的。向量组的线性相关的定义还可用另一个说法。

定义 向量组x_1，…，$x_n(n\geqslant1)$称为线性相关，如果有数域 P中不全为零的数k_1，k_2，…，k_n，使$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = 0$。

读者可自行验证上述两个定义在$n\geqslant2$时是等价的。

定义 一向量组不线性相关，就称为线性无关；或者说，一向量组x_1，…，x_n称为线性无关，如果由$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=0$，则可以推出$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$。

在n维向量空间中，任何由n个线性无关的向量构成的向量组α_1，α_2，…，α_n，称为n维向量空间的一组基。每个n维向量都可表成这一组基的线性组合。上述的向量组e_1，e_2，…，e_n，称为n维向量空间R^n的自然基底。

若函数$y=f(x)$，其中x为n维向量，y为L维向量，则称f为L维向量函数。

A.2 矩阵

A.2.1 矩阵的定义

假设下面的三个向量表示某公司一月、二月和三月的销售额数字，即：

一月 （4，10，1，5）

二月 （3，12，3，2）

三月 （2，8，0，5）

上面的记法可以扩展成一个数组，用来表示公司在本年某一季度的销售额数据：

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 & 5 \\ 3 & 12 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

这种类型的数组称为矩阵。一般地有：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

矩阵是行和列组成的。矩阵A的第i行第j列的元素记为a_{ij}。矩阵的行可以认为是行向量，矩阵的列可认为是列向量。通常把s行n列的矩阵称为“s×n”矩阵。实际上，向量只不过是特殊类型的矩阵：（n维）行向量是1×n矩阵，（n维）列向量是n×1矩阵。值得注意的是，1×1矩阵（一行一列）仅仅是一个数，例如5可以认为是1×1矩阵。

A.2.2 矩阵的运算

如果某公司第二季度的销售额图表是第一季度的销售额图表的4倍，那末对应第二季度的矩阵应当是：

$$\begin{pmatrix} 16 & 40 & 4 & 20 \\ 12 & 48 & 12 & 8 \\ 8 & 32 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

也就是说，我们进行了运算：

$$4\times\begin{pmatrix}4&10&1&5\\3&12&3&2\\2&8&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&40&4&20\\12&48&12&8\\8&32&0&20\end{pmatrix}$$

对此，我们抽象成下述定义：

定义（矩阵的数量乘法） 矩阵

$$\begin{pmatrix}ka_{11}&ka_{12}&\cdots&ka_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ka_{s1}&ka_{s2}&\cdots&ka_{sn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵$A=(a_{ij})_{sn}$与数k的数量乘积，记为kA。换言之，用数k乘矩阵就是把矩阵的每个元素都乘上k。

考虑X和Y公司在整个第一季度内的销售图表。即对X公司为：

$$\begin{pmatrix}4&10&1&5\\3&12&3&2\\2&8&0&5\end{pmatrix}$$

对Y公司为：

$$\begin{pmatrix}3&15&0&0\\5&11&3&2\\4&14&6&3\end{pmatrix}$$

假设两个公司已合并成Z公司，那末Z公司的销售额，例如一月份A的销售额应为7。易见，Z

公司的销售额应由矩阵给出：

$$\begin{pmatrix} 4+3 & 10+15 & 1+0 & 5+0 \\ 3+5 & 12+11 & 3+3 & 2+2 \\ 2+4 & 8+14 & 0+6 & 5+3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 25 & 1 & 5 \\ 8 & 23 & 6 & 4 \\ 6 & 22 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

对此，抽象成如下的定义：

定义（矩阵的加法）

$$\text{设}A=(a_{ij})_{s\,n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

$$B=(b_{ij})_{s\,n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

是两个$s\times n$矩阵，则矩阵 C为：

$$C=(c_{ij})_{s\,n}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots a_{sn}+b_{sn} \end{pmatrix}$$

矩阵 C称为A和 B的和，记为 $C = A + B$。

矩阵的加法就是矩阵对应元素相加，当然，相加的矩阵必须要有相同的行数和列数　由于矩阵的加法归结为它们的元素的加法，也就是数的加法，所以不难验证它满足：

结合律：$A + (B + C) = (A + B) + C$

交换律：$A + B = B + A$

元素全为零的矩阵称为零矩阵，记为 $O_{s,n}$。在不致引起含混的时候，可简写为O。显然，对任一矩阵A，有：

$$A + O = A$$

矩阵：

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A的负矩阵，记为 $-A$。显然有：

$$A + (-A) = 0$$

矩阵的减法定义为：

$$A - B = A + (-B)$$

考虑由矩阵给出的X公司第一季度的销售额图表：

$$\begin{array}{c} \\ \text{一月} \\ \text{二月} \\ \text{三月} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 & 5 \\ 3 & 12 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

现假设1,000个A的利润为200元，1,000个B的利润为100元，1,000个C的利润为400元，1,000个D的利润为200元。为简单起见，以100元作为货币单位。由此可定义利润列向量如下：

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

另外，假设每销售各1,000个单位的A、B、C、D，应付税金分别是10元、20元、50元、30元。如以10元为税金单位计算，可以构造税金向量为：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

我们再把利润和税金向量合成资金矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

现在计算季度的总利润和总税金：

利润（单位1,000元）　　税金（单位：10元）

$$\begin{matrix} \\ \text{一月} \\ \text{二月} \\ \text{三月} \end{matrix}\begin{pmatrix} (4\times2)+(10\times1) & (4\times1)+(10\times2) \\ +(1\times4)+(5\times2) & +(1\times5)+(5\times3) \\ (3\times2)+(12\times1) & (3\times1)+(12\times2) \\ +(3\times4)+(2\times2) & +(3\times5)+(2\times3) \\ (2\times2)+(8\times1) & (2\times1)+(8\times2) \\ +(0\times4)+(5\times2) & +(0\times5)+(5\times3) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 32 & 44 \\ 34 & 48 \\ 22 & 33 \end{pmatrix}\begin{matrix} \text{一月} \\ \text{二月} \\ \text{三月} \end{matrix}$$

利润　税金

也就是说，第一个月的总利润和总税金分别为32千元、440元，等等。对此，可抽象成下述定义。

定义（矩阵乘法）

$$设A=(a_{ik})_{sn}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}&a_{s2}\cdots a_{sn}\end{pmatrix}$$

$$B=(b_{kj})_{nm}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\cdots b_{1m}\\b_{21}&b_{22}\cdots b_{2m}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\b_{n1}&b_{n2}\cdots b_{nm}\end{pmatrix}$$

那末，矩阵为：

$$C=(c_{ij})_{sm}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\cdots c_{1m}\\c_{21}&c_{22}\cdots c_{2m}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\c_{s1}&c_{s2}\cdots c_{sm}\end{pmatrix}$$

其中：$c_{ij}=a_{i1}+b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

矩阵C称为A与B的乘积，记为C = AB

由矩阵乘法的定义可以看出，矩阵A 与B 的乘积C的第i 行第j列的元素c_{ij}，等于第一个矩阵A的第i 行元素与第二个矩阵B的第j 列的对应元素乘积的和。当然，在矩阵乘积的定义中，我们要求第二个矩阵的行数与第一个矩阵的列数相等。

这样，在上例中季度总利润和总税金可用矩阵乘法表示如下：

$$A=\begin{pmatrix}4 & 10 & 1 & 5\\ 3 & 12 & 3 & 2\\ 2 & 8 & 0 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 4 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}32 & 44\\ 34 & 48\\ 22 & 33\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}4 & 10 & 1 & 5\\ 3 & 12 & 3 & 2\\ 2 & 8 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 4 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 44\\ 34 & 48\\ 22 & 33\end{pmatrix}=C$$

任何线性联立方程组都可用这种形式表示。考虑具有n个未知数x_1，…，x_n的n个方程：

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n
\end{aligned}$$

若令：

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

$$b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

那末，上述方程组可由$Ax=b$来表示。可见，当我们引进了矩阵和向量概念，并适当地定义了某些运算后，就可简洁地表示很多关系。

矩阵的乘法满足结合律：

设 $A=(a_{ij})_{sn}$，$B=(b_{jk})_{nm}$，$C=(c_{kl})_{mr}$，则有$(AB)C=A(BC)$。请读者自行验证。

但是，矩阵的乘法不满足交换律，即一般说来$AB\neq BA$。这是由于，一方面，在矩阵的乘积中要求第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数，否则没有意义（例如，$A=(a_{ij})_{sn}$，$B=(b_{jk})_{nm}$，因为$n=n$，则AB有意义；但BA没有意义，因为$m\neq s$）。另一方面，即使AB与BA都有意义，它们的行数和列数也不一定相等（例如，A为3×4矩阵，B为4×3矩阵，则AB为3×3矩阵，而BA为4×4矩阵）。即使相乘的矩阵都是$n\times n$矩阵，这时虽然AB与BA都有意义，而且都是$n\times n$矩阵，但它们仍不一定相等。例如：

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$$

在这个例子中，我们还看到两个不为零的矩阵

的乘积可以是零，这是矩阵乘法的一个特点。由此还可得出矩阵乘法的消去律不成立，即当$AB=AC$时，不一定有$B=C$。例如：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 1\times 1+1\times(-1) & 1\times(-1)+1\times 1 \\ -1\times 1+(-1)\times(-1) & (-1)\times(-1)+(-1)\times 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix} 1\times(-1)+1\times 1 & 1\times 1+1\times(-1) \\ (-1)\times(-1)+(-1)\times 1 & -1\times 1+(-1)\times(-) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

但$B\neq C$。

定义 主对角线上的元素全是1，其余元素全是0的$n\times n$矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\cdots 0 \\ 0 & 1\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \\ 0 & 0\cdots 1 \end{pmatrix}$$

称为n阶单位矩阵，记为I_n，有时简写为I。显

然有：

$$A_{s,n}I_n = A_{s,n},\quad I_s A_{s,n} = A_{s,n}$$

矩阵的乘法和加法还满足分配律，即：

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B+C)A = BA + CA$$

请读者自行验证。

我们还可以定义矩阵的方幂。设A是一 $n \times n$矩对阵，定义

$$A^1 = A,\quad A^{k+1} = A^k A$$

换言之，A^k就是k个A连乘。当然，方幂只能对行数与列数相等的矩阵（即方阵）来定义。由乘法的结合律不难证明 $A^k A^j = A^{k+j}$，$(A^k)^j = A^{kj}$。这里k、j为任意正整数。证明留给读者。因为矩阵的乘法不适合交换律，所以$(AB)^k$ 与 $A^k B^k$一般不相等。

不难验证，矩阵的数量乘积满足以下规律：

$$(k+L)A = kA + LA$$

$$k(A+B) = kA + kB$$

$$k(LA) = (kL)A$$

$$1A = A$$

$$k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

把一矩阵A 的行列互换，所得到的矩阵称为A

的转置，记为A′。**定义**如下：

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{m} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{s1} & a_{s2}\cdots a_{sn} \end{pmatrix}$$

所谓A的转置就是指矩阵：

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{s1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{s2} \\ \vdots & \cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{sn} \end{pmatrix}$$

显然，s×n矩阵的转置是n×s矩阵。

矩阵的转置适合以下的规律：

$$(A')'=A,\quad (A+B)'=A'+B',$$

$$(AB)'=B'A',\quad (kA)'=kA'$$

有了上述定义、运算法则和规律，我们就可以将矩阵和向量象数一样进行运算，而不必写成展开形式，这就为推理和计算提供了很大的方便。

A.2.3 矩阵的秩和可逆矩阵

我们先看一个线性方程组：

$$2x_1+x_2+3x_3=7$$

$$4x_1+2x_2+6x_3=14$$

$$x_1+x_2+x_3=4$$

显然，在方程组中第二个方程（或第一个方

程）是多余的，因为：

$$2(2x_1+x_2+3x_3)=2\times 7=4x_1+2x_2+6x_3=14$$

现在，我们将其用矩阵和向量的形式给予表示：

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&6\\1&1&1\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}7\\14\\4\end{pmatrix}$$

$$Ax=b$$

将A和 b 合并成一个矩阵称为方程组的增广矩阵：

$$\begin{pmatrix}2&1&3&7\\4&2&6&14\\1&1&1&4\end{pmatrix}$$

并设 $\alpha_1'=(2,1,3,7)$，$\alpha_2'=(4,2,6,14)$，$\alpha_3'=(1,1,1,4)$

显然，有$\alpha_2'=2\alpha_1'+0\alpha_3'$，因此向量组$\alpha_1'$，$\alpha_2'$，$\alpha_3'$线性相关。去掉 α_2'，向量组 α_1'，α_3'是否相关呢？如果α_1'与 α_3'相关，应有k 使$\alpha_1'=k\alpha_3'$，即：

$$(2,1,3,7)=k(1,1,1,4)=(k,k,k,4k)$$

由两向量相等的定义可知，应有各分量分别相等：

$$2=k,\ 1=k,\ 3=k,\ 7=4k$$

但这是不可能的，故α_1'与α_3'线性无关。因此由α_1'，α_2'，α_3'构成的矩阵，只有两个向量线性无关。

在一个向量组中的一个部分组，称为一个极大线性无关组。如果这个部分组本身是线性无关的，并且从这向量组中任意添一个向量（如果还有），所得的部分向量组都是线性相关。

在上例中，向量组α_1'、α_2'、α_3'有两个极大线性无关组α_1'、α_3'和α_2'、α_3'。

极大线性无关组的一个基本性质是，任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价。从直观上看，在上述方程组中，由第一个方程和第三个方程（或由第二个方程和第三个方程）构成的方程组与原方程组等价。这个性质是可以证明的。

下面不加证明地给出一个定理。

定理　一向量组中的任两个极大线性无关组都含有相同个数的向量。

这个定理表明，极大线性无关组所含向量的个数与极大线性无关组的选择无关，它直接反映了向量组本身的性质。因此有：

定义　向量组的极大线性无关组所含向量的个

数，称为这个向量组的秩。

在上例中，向量组 α_1'，α_2'，α_3' 的秩为 2。

如果我们把矩阵的每一行（列）看成一个向量，则矩阵可以认为是由这些行（列）向量组成的。

定义 所谓矩阵的行（列）秩，就是指矩阵的行（列）向量组的秩。

下面不加证明地给出一个定理。

定理 矩阵的行秩与列秩相等。

因为矩阵的行秩等于列秩，所以下面就统称为矩阵的秩，记为$\rho(A)$。

对于$n\times n$矩阵A，如果存在一个 $n\times n$ 矩阵$\tilde{A}$，使 $A\tilde{A}=\tilde{A}A=I_n$，则称 $\tilde{A}$为A的逆矩阵，记之以 A^{-1}。另外，称有逆矩阵的矩阵为可逆矩阵（或非奇异矩阵）。否则，称为奇异矩阵或不可逆矩阵。

这里 I_n类似于数中 1 的地位，A^{-1}类似于数中 $a^{-1}=\frac{1}{a}$的地位($a\neq 0$)。

下面不加证明地给出一个定理。

定理 矩阵$A_{n\,n}$为可逆的充分必要条件是 A的秩等于n，即$\rho(A)=n$。

利用矩阵的逆，可以给出线性方程组的解的矩

阵表示。例如：

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

可以写成$Ax = b$，如果$\rho(A) = n$，那末A可逆，则有：

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Longleftrightarrow I_n x = A^{-1}b \Longleftrightarrow x = A^{-1}b$$

由于A、b已知，所以A^{-1}已知，这样直接用矩阵乘法可解出x。

通常称秩$\rho(A) = n$的n阶矩阵A_{nn}为满秩矩阵，$\rho(A) < n$的A_{nn}为降秩矩阵。

A.2.4 对角矩阵和分块矩阵

以下介绍几种常见特殊矩阵的定义。

主对角线上元以外的元，都是零的n阶矩阵，称为对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

形如$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$的n阶矩阵，称为三角形矩阵。

矩阵A如果是形如

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中A_1，A_2，…A_m为阶数小于A的矩阵（A_1，A_2，…，A_m阶数可相同亦可不相同），则称A为分块对角矩阵。例如矩阵：

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccccc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & & \end{array}\right)$$

其中：$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$，$A_3=(5)$，

$$A_4=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

对于矩阵$A_{nm}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$可以分成若干部分，如$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，则称这种形式为分块矩阵。

附录B　矩阵的特征值和特征向量

B.1　特征值和特征向量

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为参数，I 为单位矩阵，**定义**　A的特征矩阵为：

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11}\cdots - a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{n1}\cdots\lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

显然，特征矩阵$\lambda I - A$的行列式为：

$$|\lambda I - A| = \lambda^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

即：$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_i\lambda^{n-i} + \cdots + a_n$

其中：$a_1 = -(a_{11} + \cdots + a_{nn}) = -\mathrm{tr}(A)$。

$a_n = (-1)^n |A|$。

a_i是$(-1)^i$与A的所有i阶主子式的和的乘积。

$f(\lambda)$称为矩阵A的特征多项式。

$f(\lambda)$的根称为矩阵A的特征值。

假如λ_i是矩阵A的特征值，则$f(\lambda i) = |\lambda_i I - A| = 0$，那末齐次线性方程组为：

$$(\lambda_i I - A)\, x_i = 0,\quad x_i = \begin{pmatrix} X_{1i} \\ \vdots \\ X_{ni} \end{pmatrix}$$

即
$$\begin{cases} (\lambda_i - a_{11})x_{1i} - \cdots - a_{1n}x_{ni} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{n1}x_{1i} - \cdots + (\lambda_i - a_{nn})x_{ni} = 0 \end{cases}$$

有非零的解向量。它的任意非零的解向量称为矩阵A对于特征值λ_i的特征向量。也就是：

$$\lambda_i x_i = A x_i$$

对于两个矩阵A和B，若存在满秩矩阵P，使$B = P^{-1}AP$，则称A与B相似，记为$A \sim B$。

定理　n阶矩阵A与对角矩阵相似的充要条件，是A有n个线性无关的特征向量。若$x_1, \cdots, x_n$为A的n个线性无关的特征向量，$\lambda_i x_i = A x_i$，$P = (x_1, \cdots, x_n)$，则：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

特征值和特征向量的概念在实际应用上是非常重要的。

B.2 线性方程组的解与秩

设有线性方程组为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

称$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n}b_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn}b_m \end{pmatrix}$为(1)的系数矩阵与增广矩阵。

定理 1 线性方程组(1)有解的充要条件，是其系数矩阵A的秩与它的增广矩阵B的秩相等。

定理 2 线性方程组(1)若有解，则当系数矩阵A的秩$r=n$时有唯一解，当$r<n$时有无穷多解。